学習・研究用テキスト 内点法 (2D)

主ポテンシャル減少法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

標準形の線形計画問題 (主問題) を解くための主ポテンシャル減少法を解説する．アルゴリズムの計算手順を述べるだけでなく，反復回数が，主ポテンシャル関数を使って評価すると $O(nL)$ となることを示し，その後に主双対ポテンシャル関数を使って評価することにより，$O(\sqrt{n}L)$ となることを示す．

目次

1 主ポテンシャル減少法

n 個の変数を持ち，m 個の等式制約を持つ標準形の線形計画問題を

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

とする．上の問題を主問題とすれば，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

となる．

点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ は，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ を満たすならば，**内点**と呼ばれ，さらに $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすならば主問題 (1) の**実行可能内点**と呼ばれ，満たさないならば**実行不能内点**と呼ばれる．同様に，

点 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n$ は，$\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ を満たすならば，内点と呼ばれ，さらに $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}$ を満たすならば双対問題 (2) の実行可能内点と呼ばれる．

線形計画問題 (1) に次の基本的な仮定をおく．

仮定 1.1 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m である．

主ポテンシャル減少法では，開始するための初期の内点が必要なので，次の仮定も置く．

仮定 1.2 主問題の初期の実行可能内点 $\boldsymbol{x}^0$ が既知である．

1.1 アルゴリズム

ポテンシャル関数は，Karmarkar [1] により導入された．Karmarkar は，射影変換と組み合わせるアルゴリズムを提案したが，ここでは射影変換を使わないポテンシャル減少法を解説する．

主問題の最適値 ω^* の下界値 ω が既知であると仮定する．この下界値と定数 $\nu > n$ を使い主問題のポテンシャル関数

$$f_\nu^P(\boldsymbol{x}, \omega) = (n+\nu)\log(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \omega) - \sum_{i=1}^{n} \log x_i \tag{3}$$

を定義する．ポテンシャル減少法は，下界値 ω を更新するステップとポテンシャル関数値を減少させるように点 $\boldsymbol{x}$ を更新するステップから成る．

アルゴリズム 1.3 主問題のポテンシャル減少法は，次のステップからなる．

ステップ 0　初期実行可能内点を $\boldsymbol{x}^0$ とし，$k = 0$ とする．最適値の下界値 $\omega \le \omega^*$ を定める．

ステップ 1　$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ を求める．ポテンシャル関数 $f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \omega)$ をなるべく減少させるステップサイズ α を求め，$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}$ とする．

ステップ 2　可能ならば最適値の下界値 $\omega \le \omega^*$ を更新する．k を一つ増加して，ステップ 1 へ行く．

ステップ 1 では，変数 α に関して一次元探索を使うことにより，ポテンシャル関数の最小値を求めることもできる．探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ を求めるには，ポテンシャル関数がなるべく減少

するように問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k + \Delta\boldsymbol{x}, \omega) \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}^k + \Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

を考える．これは非線形計画問題であるので簡単に解けない．そこで，目的関数を一次関数

$$f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) + \nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega)^T \Delta\boldsymbol{x}$$

で近似し，その定数項 $f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega)$ を除き，アフィンスケーリング法の場合と同様に不等式制約をその十分条件である $\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\| \leq 1$ に変更した問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega)^T \Delta\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ & \|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\| \leq 1 \end{array} \tag{4}$$

を考える．ここで

$$\nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) = \frac{n+\nu}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{X}_k^{-1}\boldsymbol{e} \tag{5}$$

である．$\Delta\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k$ とすれば，問題 (4) は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega)^T \boldsymbol{X}_k \Delta\bar{\boldsymbol{x}} \\ \text{制約条件} & \bar{\boldsymbol{A}}\Delta\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \\ & \|\Delta\bar{\boldsymbol{x}}\| \leq 1 \end{array}$$

となる．アフィンスケーリング法の場合と同様に，この問題の最適解は, 目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{X}_k\nabla f_\nu^P$ を等式制約を満たす部分空間 $\{\Delta\bar{\boldsymbol{x}}|\bar{\boldsymbol{A}}\Delta\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}\}$ に射影したベクトルを

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{E} - \bar{\boldsymbol{A}}^T(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{A}}^T)^{-1}\bar{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{X}_k\nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega)$$

とすれば

$$\Delta\bar{\boldsymbol{x}} = -\frac{\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|} \tag{6}$$

となる．そして，問題 (4) の最適解は

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}_k\Delta\bar{\boldsymbol{x}} = -\frac{\boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{E} - \bar{\boldsymbol{A}}^T(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{A}}^T)^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^T)\boldsymbol{X}_k\nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega)}{\|(\boldsymbol{E} - \bar{\boldsymbol{A}}^T(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{A}}^T)^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^T)\boldsymbol{X}_k\nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega)\|} \tag{7}$$

となる．これをアルゴリズム 1.3 のステップ 1 での探索方向とする．

ステップ 2 での下界値の更新方法を解説する．式 (5) と (6) より

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{y} & = & \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}{n+\nu}(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{A}}^T)^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}_k\nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) \\ \boldsymbol{z} & = & \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}{n+\nu}(\boldsymbol{X}_k)^{-1}(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{d}) \end{array} \tag{8}$$

とすれば

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \tag{9}$$

が成立する (演習問題). したがって, $\boldsymbol{z} \geq 0$ ならば $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の実行可能解となり, $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ は最適値 ω^* の下界値である. この下界値が現在の下界値 ω よりも大きい場合に値を更新する.

演習問題 1.4 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を (8) とするとき, 式 (9) が成り立つことを示せ.

1.2 $O(nL)$ 反復の評価

前節で解説したアルゴリズム 1.3 において, 探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ を (7) とすれば, 各反復でポテンシャル関数がある定数以上減少することを示す. そのために, ベクトル $\boldsymbol{d}$ のノルムが大きいときには, 変数 $\boldsymbol{x}$ の更新によりポテンシャル関数値が減少し, そのノルムが小さいときには下界値 ω の更新によりポテンシャル関数値が減少することを示す.

ポテンシャル関数の値を評価するために, 次の初等的な結果を使う.

補題 1.5 $|t| < 1$ ならば $\log(1+t) \leq t$ である. また, $t \in (0,1)$, $|t_i| \leq t$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)^T$ ならば,

$$\sum_{i=1}^{n} \log(1 + t_i) \geq \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{t} - \frac{\|\boldsymbol{t}\|^2}{2(1-t)}$$

である.

証明 対数関数の展開式より

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$$

である. したがって, 前者は明らかである. 後者は

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \log(1 + t_i) &= \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \frac{t_i^2}{2} + \frac{t_i^3}{3} - \cdots \right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|t_i|^2}{2} + \frac{|t_i|^3}{2} + \cdots \right) \\
&\geq \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^2}{2}(1 + t + \cdots)
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{t} - \frac{\|\boldsymbol{t}\|^2}{2(1-t)}$$

より得られる．▮

補題 1.6 探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ を (7) とするとき，$\alpha < 1$ ならば，$\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ であり

$$f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \omega) - f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) \leq -\alpha\|\boldsymbol{d}\| + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}$$

が成立する．

証明 $\|\Delta\bar{\boldsymbol{x}}\| = 1$ かつ $\alpha < 1$ より

$$\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{e} + \alpha\Delta\bar{\boldsymbol{x}}) > \boldsymbol{0}$$

となる．このとき

$$\begin{aligned}
&f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \omega) - f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) \\
&= (n+\nu)\log(\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) - \omega) - \sum_{i=1}^n \log(x_i^k + \alpha\Delta x_i) \\
&\quad -(n+\nu)\log(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega) + \sum_{i=1}^n \log x_i^k \\
&= (n+\nu)\log\left(1 + \alpha\frac{\boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}\right) - \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \alpha\frac{\Delta x_i}{x_i^k}\right) \\
&= (n+\nu)\log\left(1 - \alpha\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{d}}{(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega)\|\boldsymbol{d}\|}\right) - \sum_{i=1}^n \log\left(1 - \alpha\frac{d_i}{\|\boldsymbol{d}\|}\right) \\
&\leq -(n+\nu)\alpha\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{d}}{(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega)\|\boldsymbol{d}\|} + \alpha\frac{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|} + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)} \\
&= -\alpha\left(\frac{n+\nu}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{c} - \boldsymbol{e}\right)^T \frac{\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|} + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

が得られる．式 (5) と $(\boldsymbol{X}^k\nabla f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega))^T\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{d} = \|\boldsymbol{d}\|^2$ より

$$f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \omega) - f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) \leq -\alpha\|\boldsymbol{d}\| + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}$$

となる．▮

補題 1.7 式 (8) で $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を求めるとき，$\|\boldsymbol{d}\| \leq 1$ ならば，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は双対問題の実行可能解であり

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \frac{n + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d}}{n+\nu}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega)$$

が成立する．これより

$$f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}) - f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) \leq -(\nu - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d}) \leq -(\nu - \sqrt{n}\|\boldsymbol{d}\|)$$

が成立する．

証明 $\|\boldsymbol{d}\| \leq 1$ ならば，$\boldsymbol{z}$ の定義 (8) より $\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ であり，式 (9) より $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の実行可能解となる．このとき

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})^T\boldsymbol{x}^k - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{x}^k \\
&= \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}{n+\nu}\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{d}) \\
&= \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}{n+\nu}(n + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d})
\end{aligned}$$

となるので，前半の式が成立する．また

$$\begin{aligned}
f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}) - f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) &= (n+\nu)\log\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega} \\
&= (n+\nu)\log\frac{n + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d}}{n+\nu} \\
&\leq (n+\nu)\left(\frac{n + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d}}{n+\nu} - 1\right) \\
&= -(\nu - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d})
\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{d} \leq \|\boldsymbol{e}\|\|\boldsymbol{d}\| \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{d}\|$ であるから，補題の後半の不等式が成立する． ▮

この補題の前半の結果は，目的関数値と下界値の差がある一定の割合以上で比で減少することを示している．

定理 1.8 アルゴリズム 1.3 において，$\nu \geq \sqrt{n}$ とし，ステップ 1 の探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ を (7) で計算し，ステップ 2 で式 (8) により計算される $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が $\boldsymbol{z} \geq 0$ と $\omega < \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ を満たすときに，下界値 ω を $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ に更新するとする．このとき各反復でポテンシャル関数値が少なくとも 1/8 減少する．

証明 アルゴリズム 1.3 では，ステップ 1 と 2 のどちらでも，ポテンシャル関数値が増加することはない．したがって，ステップ 1 または 2 において，ポテンシャル関数値が少なくとも 1/8 減少することを示せば十分である．ここでは，$\|\boldsymbol{d}\| \geq 3/4$ ならばステップ 1 において，$\|\boldsymbol{d}\| \leq 3/4$ ならばステップ 2 において，ポテンシャル関数値が少なくとも 1/8 減少することを示す．

まずはじめに，$\|\boldsymbol{d}\| \geq 3/4$ であると仮定する．このとき，補題 1.6 より，$\alpha = 1/2$ のときに

$$f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \omega) - f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) \leq -\alpha\|\boldsymbol{d}\| + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)} \leq -\frac{1}{8}$$

となる．次に，$\|\boldsymbol{d}\| \leq 3/4$ であると仮定する．このとき，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が $\boldsymbol{z} \geq 0$ を満たし，補題 1.7 より，$\omega < \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ と

$$f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}) - f_\nu^P(\boldsymbol{x}^k, \omega) \leq -(\nu - \sqrt{n}\|\boldsymbol{d}\|) \leq -\frac{\sqrt{n}}{4}$$

が成立するので，少なくとも 1/8 減少する． ▮

理論的には，初期解と最適解での各要素の大きさは 2^L 程度であるので，こ定理の結果から，$\nu \geq \sqrt{n}$ かつ $\nu = O(n)$ ならば，アルゴリズム 1.3 は $O(nL)$ 反復で $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \omega \leq 2^L$ を満たす主問題の近似最適解を求めることができる．

1.3 $O(\sqrt{n}L)$ 反復の評価

前節では，アルゴリズム 1.3 が必要とする反復回数が，ポテンシャル関数 (3) を使って評価することにより，$O(nL)$ となることを示した．ここでは，主双対ポテンシャル関数を使って評価することにより，同じアルゴリズムの反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ となることを示す．

主問題 (1) の実行可能内点 $\boldsymbol{x}$ と双対問題 (2) の実行可能内点 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ に対して，主双対ポテンシャル関数

$$\begin{aligned} f_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= (n+\nu)\log(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}) - \textstyle\sum_{i=1}^n(\log x_i + \log z_i) - n\log n \\ &= \nu\log\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} + n\log\frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}}{n} - \textstyle\sum_{i=1}^n\log(x_i z_i) \end{aligned} \tag{10}$$

を定義する．2 番目の等式は，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}$ を使って，式を変形している．ここで，相加相乗平均の不等式を使うと，2 番目の式の右辺の第 2 項が第 3 項以上であるので

$$f_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \nu\log\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} \tag{11}$$

であり

$$f_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq -\nu L \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} \leq e^{-L}$$

が成立する．したがって，$\nu = \sqrt{n}$ のとき，アルゴリズムの各反復で主双対ポテンシャル関数値が定数だけ減少すれば，アルゴリズムの反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ となる．以下では，このことを示す．

次の補題は，双対変数が変化していないので，補題 1.6 と同じように証明できる．

補題 1.9 探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ を (7) とするとき，$\alpha < 1$ ならば

$$f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^k) - f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) \leq -\alpha\|\boldsymbol{d}\| + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}$$

が成立する．ここで，$(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ は，$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^k = \omega$ となる双対問題の実行可能解である．

補題 1.10 式 (8) で $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を求めるとき，$\|\boldsymbol{d}\| < 1$ ならば，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は双対問題の実行可能解である．このとき，$\alpha = \|\boldsymbol{d}\|$ とすれば，$\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}$ は主問題の実行可能解であり，

$$\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \frac{n - \|\boldsymbol{d}\|^2}{n+\nu}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega)$$

が成立する．また

$$f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) - f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) \leq -\frac{\nu^2}{n+\nu} + \frac{\|\boldsymbol{d}\|^4}{2(1-\|\boldsymbol{d}\|^2)}$$

が成立する．ここで，$(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ は，$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^k = \omega$ となる双対問題の実行可能解である．

証明 $\|\boldsymbol{d}\| < 1$ ならば，$\boldsymbol{z}$ の定義 (8) より $\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ であり，式 (9) より $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の実行可能解となる．さらに，$\alpha = \|\boldsymbol{d}\|$ ならば，式 (6) と (7) より

$$\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{d} = \boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{e} - \boldsymbol{d}) > 0$$

となる．このとき

$$(\boldsymbol{X}_k + \alpha\Delta\boldsymbol{X})\boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}{n+\nu}\boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D})(\boldsymbol{X}_k)^{-1}(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{d}) = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}{n+\nu}(\boldsymbol{e} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{d}) \quad (12)$$

であり

$$(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - \omega}{n+\nu}(n - \|\boldsymbol{d}\|^2)$$

である．また

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となる．上の 2 つの等式より，前半の等式が成立する．

式 (11) より

$$f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) \geq \nu \log(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k = \nu \log(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k - \omega)$$

であり，さらに，式 (12) を使えば

$$\begin{aligned}
&f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\
&= \nu \log(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{z} + n \log(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{z} - \sum_{i=1}^n \log(x_i^k + \alpha\Delta x_i) z_i - n \log n \\
&= \nu \log \frac{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k - \omega}{n+\nu}(n - \|\boldsymbol{d}\|^2) + n \log(n - \|\boldsymbol{d}\|^2) - \sum_{i=1}^n \log(1 - d_i^2) - n \log n \\
&= \nu \log(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k - \omega) + \nu \log \left(1 - \frac{\nu + \|\boldsymbol{d}\|^2}{n+\nu}\right) + n \log \left(1 - \frac{\|\boldsymbol{d}\|^2}{n}\right) - \sum_{i=1}^n \log(1 - d_i^2) \\
&\leq f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) - \nu \frac{\nu + \|\boldsymbol{d}\|^2}{n+\nu} - \|\boldsymbol{d}\|^2 - \sum_{i=1}^n \left(-d_i^2 - \frac{d_i^4}{2(1 - \|\boldsymbol{d}\|^2)}\right) \\
&\leq f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) - \frac{\nu^2 + \nu\|\boldsymbol{d}\|^2}{n+\nu} + \frac{\|\boldsymbol{d}\|^4}{2(1 - \|\boldsymbol{d}\|^2)}
\end{aligned}$$

となるので，補題の後半の結果が得られる． ▌

定理 1.11 アルゴリズム 1.3 において，$\nu \geq \sqrt{n}$ とし，ステップ 1 の探索方向 $\Delta\boldsymbol{x}$ を (7) で計算し，ステップ 2 で式 (8) により求められる $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が $\boldsymbol{z} \geq 0$ と $\omega < \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$ を満たすときに，下界値 ω を $\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$ に更新する (主双対ポテンシャル関数の評価では $\boldsymbol{z}^k$ を $\boldsymbol{z}$ に更新する)．このとき各反復で主双対ポテンシャル関数値が少なくとも 1/8 減少する．

証明 アルゴリズム 1.3 では，ステップ 1 と 2 のどちらでも，ポテンシャル関数値が増加することはない．

$\|\boldsymbol{d}\| \geq 3/4$ であると仮定する．このとき，補題 1.9 より，ステップ 1 で $\alpha = 1/2$ のときに

$$f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^k) - f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) \leq -\alpha\|\boldsymbol{d}\| + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)} \leq -\frac{1}{8}$$

が成立する．次に，$\|\boldsymbol{d}\| \leq 3/4$ であると仮定する．このとき，ステップ 1 での α は一次元探索で主双対ポテンシャル関数値が最小となるように求めるので，$\alpha = \|\boldsymbol{d}\|$ のときよりもポテンシャルが減少する．また，ステップ 2 では，$\boldsymbol{z} \geq 0$ と $\omega < \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$ となり，下界値あるいは双対変数が更新され，補題 1.10 より

$$f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) - f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) \leq -\frac{\nu^2}{n+\nu} + \frac{\|\boldsymbol{d}\|^4}{2(1 - \|\boldsymbol{d}\|^2)} \leq -\frac{1}{2} + \frac{81}{224}$$

が成立する．いずれにしても，主双対ポテンシャル関数値は，少なくとも 1/8 減少する．

$\blacksquare$

参考文献

[1] Karmarkar, N., A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming, *Combinatorica* **4** (1984) 373-395