

数理工学第一 中間試験問題 2005年5月31日

- 注意：
- ・それぞれの問題ごとに1枚の答案用紙を使用すること。
 - ・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。
 - ・答えは結果のみではなく、導出過程も要領よく記述すること。

問題1

1. 命題 p と命題 q からなる複合命題 $(p \rightarrow \neg q) \vee q$ がトートロジー（恒真命題）であることを示せ。
2. $P(x, y)$ を命題関数とする。 $\forall x, \exists y, P(x, y)$ の否定を $\neg P(x, y)$ を用いて表せ。

問題2

1. $(A - B) \cap (C - B)^c \subset A - C$ が成り立つことを示せ。
2. $f: A \rightarrow B$ を写像、 $(Q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を B の部分集合族とすると、 $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(Q_\lambda)$ が成り立つことを示せ。

問題3

\mathbb{R} から \mathbb{R} への写像 f を $f(x) = e^{-x^2}$ と定義する。このとき、以下のような関係となる \mathbb{R} の部分集合 P, Q, R の例を挙げよ。その例において、それぞれ不等式の両辺がどのような集合になるかも述べること。

1. $f(P \cap Q) \neq f(P) \cap f(Q)$
2. $f(f^{-1}(R)) \neq R$

問題4

集合 A の直積 $(A \times A)$ から集合 A への写像 f が、以下の性質を持っているとする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall x \in A, f(x, x) = x \\ \bullet \forall x, y \in A, f(x, y) = f(y, x) \\ \bullet \forall x, y, z \in A, f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) \end{array} \right.$$

また、 A の元 x と y に対し、 $f(x, y) = y$ が成り立つとき $x \leq y$ と表記する。

1. 関係 \leq が A における順序となっていることを示せ。
2. 上限の定義を述べた上で、2つの元からなる集合 $\{x, y\}$ の上限が $f(x, y)$ と一致することを示せ。