数理工学第一　中間試験解答例　　2013 年 6 月 4 日

問題 1

(1) 命題 $p \to q$ の真偽表を書け．

(2) $p, q, \neg, \vee, \wedge$ の中からいくつかの記号を使って，$p \to q$ と同値な命題を構成せよ．

(3) 推論 $p \Rightarrow q$ の意味を説明せよ．

解答 (1) 真偽値表を書くと次のようになる．

表 1　$p \to q$ の真偽表

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(2) $p \to q \equiv \neg p \vee q$ であることが，次のように真偽値表を書くことでわかる．

表 2　$\neg p \vee q$ の真偽表

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(3) 命題 p が真ならば命題 q が真であることを導き出せるとき，$p \Rightarrow q$ と表す．すなわち，$p \Rightarrow q$ は命題 $p \to q$ が真であることを表している．

問題 2

(1) 写像の逆像と逆写像の違いを簡単に説明せよ．

(2) 写像 $f : [-1, 1] \to (-1, 1)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{ある非負の整数 } n \text{ に対して，} x = \frac{1}{2^n} \text{ または } x = -\frac{1}{2^n} \\ x & \text{上記以外} \end{cases}$$

と定める．このとき，f は全単射であることを証明せよ．

解答 (1) 以下，写像 $f: A \to B$ を考える．$Q \subset B$ に対して，f による Q の逆像 $f^{-1}(Q)$ は $f^{-1}(Q) = \{x \in A |\ f(x) \in Q\}$ と定義される．このように，逆像は f が全単射であるかどうかによらず定義できる．一方，f が全単射であるとき，任意の $b \in B$ に対して $f(a) = b$ となる $a \in A$ がただ一つ存在する．このとき，各元 $b \in B$ に対してこの $a \in A$ を対応させる，B から A への写像を定義することができる．この写像を f の逆写像といい，f^{-1} と表す．

(2) まず f が全射であることを示す．$y \in (-1, 1)$ とする．このとき，2 つの場合に分けて考える．(a) ある自然数 n が存在して，$y = \frac{1}{2^n}$ または $y = -\frac{1}{2^n}$ と書ける場合：このとき，$2y \in [-1, 1]$ であり，$f(2y) = y$ となる．(b) (a) 以外の場合：$f(y) = y$ となる．以上により，f は全射であることが分かる．

次に f が単射であることを示す．ここで $K = \{\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2^2}, \ldots\}$, $L = [-1, 1] - K$ とし，$x_1, x_2 \in [-1, 1]$ に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ であるとする．いま，x_1, x_2 のうち一方は K に属し，他方は L に属するとし，$x_1 \in K,\ x_2 \in L$ とする．このとき，$x_2 = f(x_2) = f(x_1) = \frac{x_1}{2}$ となり，$x_2 \in K$ となって矛盾が生じる．従って，x_1, x_2 はともに K に属するか，ともに L に属する．(c) x_1, x_2 ともに K に属する場合：$\frac{x_1}{2} = f(x_1) = f(x_2) = \frac{x_2}{2}$ より $x_1 = x_2$ となる．(d) $x_1 \in L,\ x_2 \in L$ の場合：$x_1 = f(x_1) = f(x_2) = x_2$ となるので $x_1 = x_2$ となる．以上により，$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ となるので，f は単射である．

問題 3

$f: A \to B$ を写像とし，$(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を A の部分集合族とするとき，次の式が成り立つことを示せ．

(1) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \subset f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(P_\lambda))$
(2) $f(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(P_\lambda)$

解答 (1) 次のようにして示すことができる．

$$\begin{aligned} x \in \cap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda &\Rightarrow \forall \lambda \in \lambda,\ x \in P_\lambda \\ &\Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda,\ f(x) \in f(P_\lambda) \\ &\Rightarrow f(x) \in \cap_{\lambda \in \Lambda} f(P_\lambda) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(\cap_{\lambda \in \Lambda} f(P_\lambda)) \end{aligned}$$

(2) 次のように示すことができる．

$$\begin{aligned} y \in f(\cap_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda) \quad &\Rightarrow \exists x \in \cap_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda,\ y = f(x) \\ &\Rightarrow \forall\lambda \in \Lambda, x \in P_\lambda,\ y = f(x) \\ &\Rightarrow \forall\lambda \in \Lambda,\ y \in f(P_\lambda) \\ &\Rightarrow y \in \cap_{\lambda\in\Lambda}f(P_\lambda) \end{aligned}$$

問題 4

(1) 順序集合 $(A, \leq)$ とその空でない部分順序集合を M とする．このとき，M の A における上限の定義を述べよ．

(2) 上の問題で A を有理数全体の集合 ($A = Q$)，$\leq$ を通常の大小関係とし，$M = \{x|x \in A,\ 0 < x < \sqrt{3}\}$ とする．このとき，M の A における上限が存在しないことを証明せよ．

解答 (1) M の任意の元 x に対して $x \leq a$ を満たすような元 $a \in A$ をすべて集めた集合を M の A における上界といい，M^* と表す．そして M^* に最小元 $\min M^*$ が存在するとき，それを M の A における上限という．

(2) M の A における上限が存在したとして，それを a とする．このとき，$a \geq \sqrt{3}$ である．しかし，a は有理数だから，$a \neq \sqrt{3}$ であるので，$a > \sqrt{3}$ となる．したがって，$a > b > \sqrt{3}$ となる有理数 b が存在する．このとき b は a より小さい M の上界になり，a が M の上限であることに矛盾する．したがって，M の A における上限は存在しない．