2012 年 7 月 31 日

数理工学第一 期末試験

・試験時間は 90 分とする.
・すべての答案用紙に**学籍番号, 氏名, 問題番号**を必ず記入すること.
・答えは結果のみではなく, 導出過程も要領よく記すこと. ただし, 解答に不要な記述は減点の対象とする.

問題 1

(1) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ が自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と対等であることを示せ.

(2) 集合 A と B がともにたかだか可算な集合であるならば, その和集合 $A \cup B$ はたかだか可算な集合であることを示せ.

問題 2

(1) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X, Y に対して, その内部をそれぞれ X^i, Y^i とするとき, $X \subset Y$ ならば $X^i \subset Y^i$ となることを示せ.

(2) 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において区間 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$, 区間 $(c,d) = \{x \mid c < x < d\}$ の和集合 $(a,b) \cup (c,d)$ が開集合であることを示せ.

問題 3

(1) 距離空間 (X,d) の点列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ がコーシー列であることの定義を述べよ.

(2) 集合 $\mathbb{R}^n$ において, 関数 $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に対して,

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

と定義するとき, 関数 d_1 が $\mathbb{R}^n$ 上の距離となっていることを示せ.

問題 4

(1) 集合 $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 2\} \subset \mathbb{R}^2$ がアフィン集合であることを示せ.

(2) 凸集合 S, T の共通部分 $S \cap T$ が凸集合であることを示せ.