

数理工学第一 中間試験問題

2007年5月29日

- 注意： ・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。
・答えは結果のみではなく、導出過程も要領よく記述すること。

問題 1

実数 x と y を含んだ 2 つの推論が下にある。それぞれの推論が正しいかどうか述べよ。推論が正しくないものについては、それを示す反例を 1 つ挙げよ。

- $x + y < 2 \Rightarrow x^2 + y^2 < 2$
- $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$

問題 2

P と Q は A の部分集合であり、 f を A から B への写像とする。このとき、以下の関係を証明せよ。

1. $P \cap Q = P \Rightarrow f(P \cup Q) = f(Q)$
2. $f(P) = f(f^{-1}(f(P)))$

問題 3

実数空間上の部分集合族 $\{P_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{N}}$ を $P_{ij} = \left\{ x \in \mathfrak{R} \mid \frac{1}{j} - \frac{1}{i} \leq x \wedge x < j - i \right\}$ と定義する。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 実数空間 \mathfrak{R} 上に通常順序関係 \leq を導入する。このとき、集合 P_{12} の最大元と上限はどうか述べよ。答えのみでよい。
2. $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{1j}$ を求め、その理由をできるだけ論理的に説明せよ。
3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{ij}$ を求めよ。答えだけで良い。

問題 4

任意の $x, y \in \mathfrak{R}$ に対し、 $x - y$ が有理数であるとき、 xTy として 2 項関係 T を定義する。

1. 2 項関係 T が \mathfrak{R} における同値関係となることを示せ。
2. 0 の同値類 $C(0)$ が可算集合 (可付番集合) であることを説明せよ。
3. 商集合 \mathfrak{R}/T (同値類を元とする集合) が無限集合であることを説明せよ。 $\aleph_0 < \aleph$ であることは証明なしに使ってよい。