数理工学第一　中間試験問題　　２００６年6月１３日

注意：　・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。
　　　　・答えは結果のみではなく、導出過程も要領よく記述すること。

問題１

$\Re$ から $\Re$ への写像 f に対し、「点 $a \in \Re$ で連続である」ことの定義を、次の命題が成り立つこととする。

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \Re,\quad |x-a| < \delta \ \rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{1}$$

1. 写像 f が「点 a で連続でない」ことは、次の命題を満たすことに一致する。(1) の命題から、この事実を導け。

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \Re,\quad |x-a| < \delta \ \wedge\ |f(x) - f(a)| \geq \epsilon \tag{2}$$

以下では、写像　$f(x) = \begin{cases} x-2 & (x \geq 1) \\ -2x & (x < 1) \end{cases}$　の連続性について考える。

2. 写像 f が点 0 で連続であることを、(1) に基づいて示せ。ただし、δ の取り方が具体的に明示してあれば、厳密な不等式の評価は省略してよい。
3. 写像 f が点 1 で連続でないことを、(2) に基づいて表せ。ただし、ϵ と x の取り方が具体的に明示してあれば、厳密な不等式の評価は省略してよい。

問題２

$S = \{a, b, c, d\}$ とする。S のべき集合 2^S から、集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ への写像として、次のようなものを考える。

$$f(P) = |P|$$

ここで、P は S の部分集合であり、$|P|$ はその元の数を意味する。

1. 写像 f が単射であるかどうか述べ、その理由を挙げよ。
2. 写像 f が全射であるかどうか述べ、その理由を挙げよ。

裏へ続く

問題 3

$f : A \to B$ を写像とする。P, Q, R は A の部分集合、$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は B の部分集合族である。このとき、以下の関係式を証明せよ。

1. $f(P \cap Q \cap R) \subset f(P) \cap f(Q) \cap f(R)$
2. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (S_\lambda \cap T_\lambda) \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \right)$

問題 4

集合 A における 2 項関係 S が次の性質を持っているとして、以下の問いに答えよ。

$$\begin{cases} \bullet \quad \forall x \in A, & xSx \\ \bullet \quad \forall x, y, z \in A, & xSy,\ ySz \ \Rightarrow\ xSz \end{cases}$$

1. 任意の $x, y \in A$ に対し、xSy かつ ySx であるとき、xTy として関係 T を定義する。同値関係の定義を述べ、T が A における同値関係となることを示せ。
2. 同値関係 T による x の同値類を $C(x)$ と書く。$C(a_1) = C(a_2),\ C(b_1) = C(b_2)$ という仮定のもとで、 $a_1Sb_1 \ \Leftrightarrow\ a_2Sb_2$ となることを示せ。なお、 $xTy \ \Leftrightarrow\ C(x) = C(y)$ であることは利用してよい。
3. 集合 A の関係 T による商集合 A/T （同値類を元とする集合）について考える。任意の $C(a), C(b) \in A/T$ に対し、aSb のとき、$C(a)OC(b)$ として関係 O を定義する。なお 2. の議論より、関係 O は一意に定まる。順序関係の定義を述べ、この関係 O が商空間 A/T における順序関係となることを示せ。