数理工学第一　中間試験問題　　２００６年6月１３日

略解

問題１

$\Re$ から $\Re$ への写像 f に対し、「点 $a \in \Re$ で連続である」ことの定義を、次の命題が成り立つこととする。

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \Re,\ \ |x-a| < \delta\ \rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{1}$$

1. 写像 f が「点 a で連続でない」ことは、次の命題を満たすことに一致する。(1) の命題から、この事実を導け。

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \Re,\ \ |x-a| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(a)| \geq \epsilon \tag{2}$$

以下では、写像　$f(x) = \begin{cases} x-2 & (x \geq 1) \\ -2x & (x < 1) \end{cases}$　の連続性について考える。

2. 写像 f が点 0 で連続であることを、(1) に基づいて示せ。ただし、δ の取り方が具体的に明示してあれば、厳密な不等式の評価は省略してよい。
3. 写像 f が点 1 で連続でないことを、(2) に基づいて表せ。ただし、ϵ と x の取り方が具体的に明示してあれば、厳密な不等式の評価は省略してよい。

1.

$$\begin{aligned}
&\neg\,(\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \Re,\ \ |x-a| < \delta\ \rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon) \\
&\ \equiv \exists \epsilon > 0, \neg\,(\exists \delta > 0,\ \forall x \in \Re,\ \ |x-a| < \delta\ \rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon) && (\because \text{ドモルガンの法則}) \\
&\ \equiv \exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0, \neg\,(\forall x \in \Re,\ \ |x-a| < \delta\ \rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon) && (\because \text{ドモルガンの法則}) \\
&\ \equiv \exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \Re,\ \ \neg\,(|x-a| < \delta\ \rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon) && (\because \text{ドモルガンの法則}) \\
&\ \equiv \exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \Re,\ \ |x-a| < \delta\ \wedge\ \neg\,(|f(x) - f(a)| < \epsilon) && (\because \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q) \\
&\ \equiv \exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \Re,\ \ |x-a| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(a)| \geq \epsilon
\end{aligned}$$

2. 任意の $\epsilon > 0$ に対し、$\delta = 0.5\epsilon > 0$ を取る。このとき、$|x - 0| < \delta$ という条件を満足する $x \in \Re$ に関して、$|f(x) - f(0)| < 2\delta = \epsilon$ が成立する。よって、写像 f は $x = 0$ で連続である。
3. $\epsilon = 0.5$ とする。任意の $\delta > 0$ に対して、$x = \max\{1 - 0.5\delta,\ 0.9\} \in \Re$ を取る。すると、$|x-1| \leq 0.5\delta < \delta$　かつ $|f(x) - f(1)| \geq |-1.8 - (-1)| = 0.8 > \epsilon$　となる。よって、写像 f は $x = 1$ で連続ではない。

問題 2

$S = \{a, b, c, d\}$ とする。S のべき集合 2^S から、集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ への写像として、次のようなものを考える。

$$f(P) = |P|$$

ここで、P は S の部分集合であり、$|P|$ はその元の数を意味する。

1. 写像 f が単射であるかどうか述べ、その理由を挙げよ。
2. 写像 f が全射であるかどうか述べ、その理由を挙げよ。

---

1. 単射ではない。なぜなら、$\{a, b\} \neq \{c, d\}$ であるが、$f(\{a, b\}) = f(\{c, d\}) = 2$ となるからである。
2. 全射である。全射の条件 $f(2^S) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ を満たすことは、$f(\emptyset) = 0,\ f(\{a\}) = 1,\ f(\{a, b\}) = 2,\ f(\{a, b, c\}) = 3,\ f(\{a, b, c, d\}) = 4$ から確認できる。

問題 3

$f : A \to B$ を写像とする。P, Q, R は A の部分集合、$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は B の部分集合族である。このとき、以下の関係式を証明せよ。

1. $f(P \cap Q \cap R) \subset f(P) \cap f(Q) \cap f(R)$
2. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (S_\lambda \cap T_\lambda) \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda\right)$

1.

$$\begin{aligned} y \in f(P \cap Q \cap R) &\iff \exists x \in P \cap Q \cap R,\quad f(x) = y \\ &\iff \exists x,\quad x \in P,\ x \in Q,\ x \in R,\quad f(x) = y \\ &\Longrightarrow \exists x,\quad f(x) \in f(P),\ f(x) \in f(Q),\ f(x) \in f(R),\quad f(x) = y \\ &\Longrightarrow y \in f(P),\ y \in f(Q),\ y \in f(R) \\ &\iff y \in f(P) \cap f(Q) \cap f(R) \end{aligned}$$

よって、$f(P \cap Q \cap R) \subset f(P) \cap f(Q) \cap f(R)$ が示された。

2.

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (S_\lambda \cap T_\lambda) &\iff \exists\lambda \in \Lambda,\ \ x \in S_\lambda \cap T_\lambda \\
&\iff \exists\lambda \in \Lambda,\ \ x \in S_\lambda \ \wedge\ x \in T_\lambda \\
&\implies (\exists\lambda \in \Lambda,\ x \in S_\lambda)\ \wedge\ (\exists\lambda \in \Lambda,\ x \in T_\lambda) \\
&\iff x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \ \wedge\ x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \\
&\iff x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda\right)
\end{aligned}
$$

よって、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (S_\lambda \cap T_\lambda) \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda\right)$ が示された。

問題 4

集合 A における 2 項関係 S が次の性質を持っているとして、以下の問いに答えよ。

$$
\begin{cases}
\bullet\ \ \forall x \in A, & xSx \\
\bullet\ \ \forall x, y, z \in A, & xSy,\ ySz\ \Rightarrow\ xSz
\end{cases}
$$

1. 任意の $x, y \in A$ に対し、xSy かつ ySx であるとき、xTy として関係 T を定義する。同値関係の定義を述べ、T が A における同値関係となることを示せ。
2. 同値関係 T による x の同値類を $C(x)$ と書く。$C(a_1) = C(a_2),\ C(b_1) = C(b_2)$ という仮定のもとで、 $a_1Sb_1 \ \Leftrightarrow\ a_2Sb_2$ となることを示せ。なお、 $xTy \ \Leftrightarrow\ C(x) = C(y)$ であることは利用してよい。
3. 集合 A の関係 T による商集合 A/T （同値類を元とする集合）について考える。任意の $C(a), C(b) \in A/T$ に対し、aSb のとき、$C(a)OC(b)$ として関係 O を定義する。なお 2. の議論より、関係 O は一意に定まる。順序関係の定義を述べ、この関係 O が商空間 A/T における順序関係となることを示せ。

次のように、問題文中の条件を (a)(b) と表記することにする。

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in A,\ xSx && \cdots\cdots\cdots\ (a) \\
&\forall x, y, z \in A,\ xSy,\ ySz\ \Rightarrow\ xSz && \cdots\cdots\cdots\ (b)
\end{aligned}
$$

1. 同値関係 T の定義は、以下の条件を満たす 2 項関係である。
   反射律： $^\forall x \in X,\quad xTx,$
   対称律： $^\forall x, y \in X,\quad xTy\ \Rightarrow\ yTx,$
   推移律： $^\forall x, y, z \in X,\quad xTy,\ yTz\ \Rightarrow\ xTz.$

- $\forall x \in A$ に対し、(a) より $xSx,\ xSx$ が成り立つので、xTx である。
- $$\begin{aligned} xTy &\Longleftrightarrow xSy,\ ySx \\ &\Longleftrightarrow ySx,\ xSy \\ &\Longleftrightarrow yTx \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} xTy,\ yTz &\Longleftrightarrow xSy,\ ySx,\ ySz,\ zSy \\ &\Longrightarrow xSz,\ zSx && (\because (b)) \\ &\Longleftrightarrow xTz \end{aligned}$$

反射律、対称律、推移律が成り立つので同値関係である。

2. $C(a_1) = C(a_2),\ C(b_1) = C(b_2)$ という仮定は、$a_1Ta_2,\ b_1Tb_2$ を意味する。つまり、$a_1Sa_2,\ a_2Sa_1,\ b_1Sb_2,\ b_2Sb_1$ である。
   - a_1Sb_1 が成り立つとする。すると、$a_2Sa_1,\ a_1Sb_1,\ b_1Sb_2$ と (b) より、a_2Sb_2 が導ける。つまり $a_1Sb_1 \ \Rightarrow\ a_2Sb_2$ である。
   - a_2Sb_2 が成り立つとする。すると、$a_1Sa_2,\ a_2Sb_2,\ b_2Sb_1$ と (b) より、a_1Sb_1 が導ける。つまり $a_2Sb_2 \ \Rightarrow\ a_1Sb_1$ である。

   以上より、 $a_1Sb_1 \ \Leftrightarrow\ a_2Sb_2$ が示された。

3. 順序関係 O の定義は、以下の条件を満たす２項関係である。

   反射律：　$^\forall x \in X,\ \ xOx,$

   反対称律：　$^\forall x, y \in X,\ \ xOy,\ yOx \ \Rightarrow\ x = y,$

   推移律：　$^\forall x, y, z \in X,\ \ xOy,\ yOz \ \Rightarrow\ xOz.$

   - $\forall C(x) \in A/T$ に対し、(a) より xSx が成り立つので $C(x)OC(x)$ がいえる。
   - $$\begin{aligned} C(x)OC(y),\ C(y)OC(x) &\Longleftrightarrow xSy,\ ySx \\ &\Longleftrightarrow xTy \\ &\Longleftrightarrow C(x) = C(y) \end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} C(x)OC(y),\ C(y)OC(z) &\Longleftrightarrow xSy,\ ySz \\ &\Longrightarrow xSz && (\because (b)) \\ &\Longleftrightarrow C(x)OC(z) \end{aligned}$$

反射律、反対称律、推移律が成り立つので順序関係である。