数理工学第一　中間試験問題　　２００５年5月３１日

略解

問題１

1. 命題 p と命題 q からなる複合命題 $(p \to \neg q) \vee q$ がトートロジー（恒真命題）であることを示せ。
2. $P(x,y)$ を命題関数とする。 $\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$ の否定を $\neg P(x,y)$ を用いて表せ。

---

1. 真偽表は以下のようになる。

p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$(p \to \neg q) \vee q$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

真偽値が全て真なので、トートロジーである。

2. ド・モルガンの法則を使う。

$$\begin{aligned}\neg(\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)) &\equiv \exists x,\ \neg(\exists y,\ P(x,y)) \\ &\equiv \exists x,\ \forall y,\ \neg P(x,y)\end{aligned}$$

問題２

1. $(A-B)\cap(C-B)^c \subset A-C$ が成り立つことを示せ。
2. $f: A \to B$ を写像、$(Q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を B の部分集合族とするとき、$f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(Q_\lambda)$ が成り立つことを示せ。

1.

$$\begin{aligned}& x \in (A-B)\cap(C-B)^c \\ \Longrightarrow\ & x \in (A\cap B^c)\cap(C\cap B^c)^c \\ \Longrightarrow\ & x \in (A\cap B^c)\cap(C^c\cup B) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ \Longrightarrow\ & x \in (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap B) && \text{(分配法則)} \\ \Longrightarrow\ & x \in A\cap B^c\cap C^c && (B^c\cap B=\emptyset\ \text{より}) \\ \Longrightarrow\ & x \in A\cap C^c \\ \Longrightarrow\ & x \in A-C\end{aligned}$$

よって、 $(A-B)\cap(C-B)^c \subset A-C$ が証明された。

2. 集合族の定義に従うと、次のように言い換えることができる。

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda) &\iff f(x) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda \\ &\iff \exists\lambda\in\Lambda,\ f(x)\in Q_\lambda \\ &\iff \exists\lambda\in\Lambda,\ x\in f^{-1}(Q_\lambda) \\ &\iff x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(Q_\lambda) \end{aligned}$$

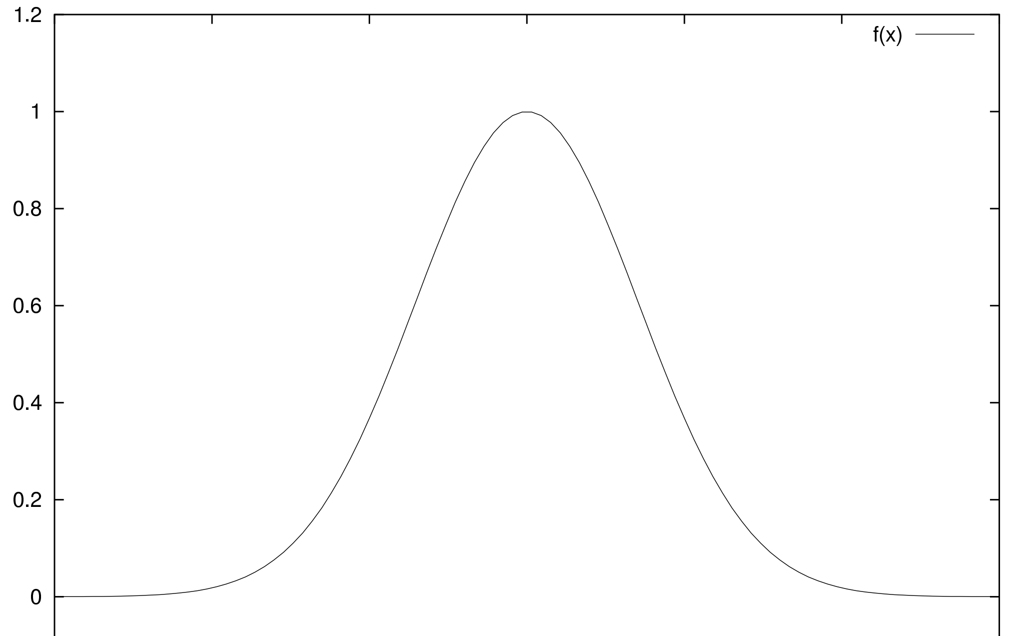
よって、 $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(Q_\lambda)$ が証明された。

問題３

$\Re$ から $\Re$ への写像 f を $f(x) = e^{-x^2}$ と定義する。このとき、以下のような関係となる $\Re$ の部分集合 P, Q, R の例を挙げよ。その例において、それぞれ不等式の両辺がどのような集合になるかも述べること。

1. $f(P \cap Q) \neq f(P) \cap f(Q)$
2. $f(f^{-1}(R)) \neq R$

$f(x) = e^{-x^2}$ は以下のようなグラフである。



1. 例えば $P=\{-1,0\}, Q=\{0,1\}$ とする。
   $P\cap Q=\{0\}$ より、$f(P\cap Q)=\{1\}$ となる。また、$f(P)=\{e^{-1},1\},\ f(Q)=\{1,e^{-1}\}$ であるので、$f(P\cap Q)=\{e^{-1},1\}$ となる。従って $f(P\cap Q)\neq f(P)\cap f(Q)$ である。
2. 例えば $R=\{1,2\}$ とする。
   $f^{-1}(R)=\{0\}$ だから、$f(f^{-1}(R))=\{1\}$ となる。従って $f(f^{-1}(R))\neq R$ である。

問題 4

集合 A の直積 $(A\times A)$ から集合 A への写像 f が、以下の性質を持っているとする。

$$\begin{cases} \bullet\quad \forall x\in A,\quad f(x,x)=x \\ \bullet\quad \forall x,y\in A,\quad f(x,y)=f(y,x) \\ \bullet\quad \forall x,y,z\in A,\quad f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z)) \end{cases}$$

また、A の元 x と y に対し、$f(x,y)=y$ が成り立つとき $x\leq y$ と表記する。

1. 関係 $\leq$ が A における順序となっていることを示せ。
2. 上限の定義を述べた上で、2 つの元からなる集合 $\{x,y\}$ の上限が $f(x,y)$ と一致することを示せ。

---

1. **反射律：** $\forall x\in A$ に対し、写像 $f(x)$ の 1 つ目の性質より $f(x,x)=x$ が成り立つので $x\leq x$ がいえる。
   反対称律： $x\leq y,\ y\leq x$ を仮定する。これは、$f(x,y)=y,\ f(y,x)=x$ を意味する。ここで、写像 $f(x)$ の 2 つ目の性質を使うと
   $$x=f(y,x)=f(x,y)=y$$
   となる。よって、$x=y$ がいえる。
   推移律： $x\leq y,\ y\leq z$ とする。これは、$f(x,y)=y,\ f(y,z)=z$ を意味する。このとき、写像 $f(x)$ の 3 つ目の性質を使うと
   $$f(x,z)=f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)=f(y,z)=z$$
   となる。よって、$x\leq z$ がいえる。
   反射律、反対称律、推移律が成り立つので順序関係である。
2. 上限の定義は、上界全部の集合の最小元である。
   つまり、$f(x,y)$ が $\{x,y\}$ の上界であり、$\{x,y\}$ の任意の上界 z に対し $f(x,y)\leq z$ となることを示したらよい。なお $\{x,y\}$ の上界とは、$x\leq z,\ y\leq z$ を満たす $z\in A$ である。
   よって、

(a)　$x \leq f(x,y)$

(b)　$y \leq f(x,y)$

(c)　$x \leq z,\ y \leq z$ を満たす任意の z に対し $f(x,y) \leq z$

を証明する必要がある。

(a) **の証明**　$x \leq f(x,y)$ とは $f(x, f(x,y)) = f(x,y)$ のことである。これは

$$f(x, f(x,y)) = f(f(x,x), y) = f(x,y)$$

より成り立つ。

(b) **の証明**　$y \leq f(x,y)$ とは $f(y, f(x,y)) = f(x,y)$ のことである。これは

$$f(y, f(x,y)) = f(f(x,y), y) = f(x, f(y,y)) = f(x,y)$$

より成り立つ。

(c) **の証明**　これは $f(x,z) = z,\ f(y,z) = z \implies f(f(x,y),z) = z$ を示すことになる。

$$f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z)) = f(x,z) = z$$

より成り立つ。

以上より、集合 $\{x,y\}$ の上限は $f(x,y)$ であることが示された。（なお、定義より上限は存在すれば唯一である）