数理工学第一 期末試験解答例

平成１６年８月３日

I.

1. (a) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X,\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0.$
   (b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$
   (c) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X,\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$
   (d) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X,\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}).$
2. $B(\boldsymbol{a}, r) = \{\, \boldsymbol{x} \in X \mid d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < r \,\}.$
3. $\boldsymbol{x} \in X$ が M の内点 $\Leftrightarrow \exists r > 0,\ B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq M.$

II.

1. (a) 内部: 空集合
   (b) 境界: $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4^2 = 1 \,\}.$
2. $k \geq 3$ のとき, $x_1 + x_2 + x_3 = 1 - 1/k < 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 \geq 0$, かつ $x_4^2 = 1$ であるので.
3.
$$\|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_{k+1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1/k \\ 1/k \\ 1 - 3/k \\ (-1)^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/(k+1) \\ 1/(k+1) \\ 1 - 3/(k+1) \\ (-1)^{k+1} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{11}{k^2(k+1)^2} + 4} > 1.$$
4. $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ とする. $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1,2,\ldots}$ が $\boldsymbol{b}^* = (0, 0, 1, 1)^T$ へ収束することを示す.
$$\|\boldsymbol{b}_k - \boldsymbol{b}^*\| = \left\| \begin{pmatrix} 1/(2k) \\ 1/(2k) \\ 1 - 3/(2k) \\ (-1)^{2k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{11}{4k^2}}$$
より, 任意の $r > 0$ に対し, $N = \left\lceil \sqrt{\frac{11}{4}}\frac{1}{r} \right\rceil + 1$ と取れば, $n \geq N$ で
$$\|\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{b}^*\| = \sqrt{\frac{11}{4}}\frac{1}{n} \leq \sqrt{\frac{11}{4}}\frac{1}{N} < \sqrt{\frac{11}{4}}\frac{1}{\sqrt{\frac{11}{4}}\frac{1}{r}} = r$$
なので $\boldsymbol{b}_n \in B(\boldsymbol{b}^*, r)$ となる.

III.

1. C から任意に２点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を取り, $\alpha \in [0, 1]$ を取る. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_\lambda$ である. さらに C_λ は凸集合なので, $\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in C_\lambda$ が成り立つ. したがって $\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in \cap_\lambda C_\lambda = C$ が成り立つ.

2. 任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し,

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}) &=& f_1(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y})+f_2(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}) \\ &\leq& \alpha f_1(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f_1(\boldsymbol{y})+\alpha f_2(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f_2(\boldsymbol{y}) \\ &=& \alpha(f_1+f_2)(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)(f_1+f_2)(\boldsymbol{y}) \\ &=& \alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y}). \end{array}$$

よって f は凸関数である.

IV.

1. 群の公理より,

   (a) 結合則が成り立つ:$\forall A, B, C \in M(2,\mathbb{R})$, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

   (b) 単位元の存在: $\exists O \in M(2,\mathbb{R})$, $\forall A \in M(2,\mathbb{R})$, $O+A = A+O = A$.

   (c) 逆元の存在: $\forall A \in M(2,\mathbb{R})$, $\exists(-A) \in M(2,\mathbb{R})$, $A+(-A) = (-A)+A = O$.

2. 環の公理より,

   (a) 加法に関して可換群をなす. すなわち, 1. に加えて, 任意の A, $B \in M(2,\mathbb{R})$ に対して $A+B = B+A$ が成り立つ.

   (b) 乗法に関して結合律が成り立つ. すなわち, 任意の A, B, $C \in M(2,\mathbb{R})$ に対し,

   $$(AB)C = A(BC)$$

   が成り立つ.

   (c) 分配則が成り立つ. すなわち, 任意の A, B, $C \in M(2,\mathbb{R})$ に対し,

   $$A(B+C) = AB+AC, \quad (B+C)A = BA+CA$$

   が成り立つ.

   (d) 乗法の単位元が存在する. すなわち, 恒等行列 I とすれば, 任意の $A \in M(2,\mathbb{R})$ に対

   $$AI = IA = A$$

   が成り立つ.

3. たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. たとえば

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   すなわち, 零因子が存在するので, 整域ではない.