数理工学第一 期末試験解答例

平成１５年７月２９日

問題 I.

1. 距離空間 (X,d) において，集合

$$B(\bar{\boldsymbol{x}},\epsilon)=\{\,\boldsymbol{x}\mid d(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x})<\epsilon\,\}$$

を中心 $\bar{\boldsymbol{x}}$, 半径 ϵ の球という．M に含まれる点 $\boldsymbol{a}$ は，十分小さい $\epsilon>0$ を取れば $B(\boldsymbol{a},\epsilon)\subseteq M$ となるとき，M の内点という．

2. $M\subseteq X$ の任意の点が M の内点となっているとき，M を X の開集合という．ユークリッド空間における開集合は，距離空間において $X=R^n$ とし，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$ に対して距離関数を

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2}$$

と置いたものに他ならない．

問題 II.

1. $M_1^i=M_1$. 開集合で凸集合.
2. $(M_1\cap M_2)^i=\phi$. 開集合で凸集合.
3. $(M_1\cup M_2)^i=M_1$. 開集合で凸集合.
4. $(M_1\cap M_2)^b=M_1\cap M_2$. 開集合でない．凸集合.
5. $(M_1\cup M_2)^b=\{\,\boldsymbol{x}\mid x^2+y^2+z^2=1\,\}\cup(\{\,\boldsymbol{x}\mid x+y+z=1\,\}\cap\{\,\boldsymbol{x}\mid x^2+y^2+z^2>1\,\})$. 開集合でない．凸集合でない．

問題 III.

1. 次の手順で示すことができる．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{epi}\ f\\
=\ &\{\,(\boldsymbol{x},\mu)\mid \mu\ge f(\boldsymbol{x})\,\}\\
=\ &\{\,(\boldsymbol{x},\mu)\mid \mu\ge \max(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}))\,\}\\
=\ &\{\,(\boldsymbol{x},\mu)\mid \mu\ge f_1(\boldsymbol{x}),\ \mu\ge f_2(\boldsymbol{x})\,\}\\
=\ &\{\,(\boldsymbol{x},\mu)\mid \mu\ge f_1(\boldsymbol{x})\,\}\\
&\quad\cap\{\,(\boldsymbol{x},\mu)\mid \mu\ge f_2(\boldsymbol{x})\,\}\\
=\ &\mathrm{epi}\ f_1\cap\mathrm{epi}\ f_2.
\end{aligned}$$

2. f_1,f_2 は凸関数なので、定理より、epi $f_1\cap$ epi f_2 は凸集合である．これは，1. より epi f が凸集合であることを表す．従って、f は凸関数である．

問題 IV.

1. まず，2×2 行列の和が 2×2 行列になることはあきらかなので，足し算は，$M(2,R)$ の２項算法となっている．

続いて群の３条件が満たされていることを示す．

G1 行列の和が結合律

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

を満たすことは当然である．

G2 ゼロ行列 O が単位元である．実際，$A\in M(2,R)$ に対して

$$A+O=O+A=A.$$

G3 $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M(2,R)$ のとき，

$$-A=\begin{pmatrix} -a & -b\\ -c & -d\end{pmatrix}$$

とおけば，$-A\in M(2,R)$ であり，かつ $A+(-A)=O$ が成り立つ．すなわち，$M(2,R)$ の任意の元に対して逆元が存在する．

2. 例えば $A=I,\ B=-I$ ととれば，$A,B\in GL(2,R)$ かつ $A-B=O\notin GL(2,R)$ であるので，$+$ は $GL(2,R)$ 上の２項算法となっていない．

3. 行列の乗算の単位元は I であるが，正則でない行列には一般に逆行列が存在しないことから，G3 が成り立たない．

4. 例えば，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

とすれば，

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}\neq BA=\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

である．