数理工学第一　　中間試験問題　　２００３年６月３日

注意：　・それぞれの問題ごとに１枚の答案用紙を使用すること。
　　　　・すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。

問題１

1. 命題 p と命題 q の関係式 $p \wedge \neg q \equiv \neg(p \to q)$ を証明せよ。

2. $P(x,y)$ を命題関数とする。次の中で正しい推論を選び、理由を簡単に述べよ。

   - $\exists x, \forall y,\ P(x,y) \quad \Rightarrow \quad \forall y, \exists x,\ P(x,y)$
   - $\forall x, \exists y,\ P(x,y) \quad \Rightarrow \quad \exists y, \forall x,\ P(x,y)$

問題２

1. $A^c \supset B - (B \cap A)$ が成り立つことを示せ。

2. $f: A \to B$ を写像とし、P, Q はそれぞれ A, B の部分集合とする。f が全射ならば $f(P) \cup Q = f(P \cup f^{-1}(Q))$ となることを示せ。

問題３

$\Re$ から $\Re$ への写像 f を $f(x) = x^2$ と定める。また、自然数 n に対し集合 P_n と Q_n を $P_n = \{x \in \Re \mid -2^{-n} < x < n\},\ Q_n = \{x \in \Re \mid -3 + \dfrac{1}{n} \leq x \leq 3 + \dfrac{1}{n}\}$ とおく。

1. $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n,\ Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ とする。このとき P, Q を求めよ（答えだけで良い）。

2. $f^{-1}(f(P)),\ \ f(f^{-1}(Q))$ を求めよ。

問題４

2 次元の実数ベクトルの集合を $\Re^2$ とする。A の 2 つの元 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対し、 $y_1 - x_1 \leq x_2 - y_2 \leq x_1 - y_1$ が成り立つとき $\boldsymbol{x} O \boldsymbol{y}$ として、集合 $\Re^2$ における関係 O を定義する。

1. 順序の公理を述べよ。

2. 上記の O が順序関係であることを示せ。