

数理工学第一 中間試験問題 2002年6月3日

注意：それぞれの問題ごとに1枚の答案用紙を使用すること。すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を忘れずに記入すること。

問題1

1. 命題 p と命題 q の関係式 $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ を証明せよ。
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成り立つことを示せ。
3. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ が成り立つことを示せ。

問題2

$f: A \rightarrow B$ を写像、 $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を A の部分集合族とする。このとき、

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \subset f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(P_\lambda)\right)$$

が成り立つことを示せ。

問題3

自然数の集合を \mathcal{N} 、整数の集合を \mathcal{Z} 、実数の集合を \mathcal{R} とする。このとき、次の問いに答えよ。

1. \mathcal{N} から \mathcal{R} への単射であり全射ではない写像を1つ挙げよ。
2. \mathcal{R} から \mathcal{Z} への全射であり単射ではない写像を1つ挙げよ。
3. \mathcal{Z} から \mathcal{N} への全単射 (つまり一対一対応) である写像を1つ挙げよ。

問題4

要素がゼロでない2次元の実数ベクトルの集合を A とする。 A の2つの元

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } x_1, x_2, y_1, y_2 \neq 0)$$

に対し、 $x_1 y_2 = x_2 y_1$ が成り立つとき $\mathbf{x} R \mathbf{y}$ として、集合 A における関係 R を定義する。このとき、関係 R が同値関係であることを証明せよ。