オペレーションズリサーチ 中間試験解答例 　2010年11月30日実施

問題 1

1. 各等式制約に -1 を掛けると次のようになる．

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{制約条件} & -2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ & x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq 5). \end{array}$$

この問題に対して，x_6 と x_7 を人工変数とする人工問題を作ると次のようになる．

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = x_6 + x_7 = 9 - 4x_2 - x_3 + x_4 - x_5, \\ \text{制約条件} & x_6 = 5 + 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4, \\ & x_7 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5, \\ & x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq 7). \end{array}$$

これを初期辞書としてシンプレックス法を開始する．目的関数における x_2 の係数が負なので x_2 を増加させる．このとき，x_6 が最初に 0 になるので x_2 と x_6 を交換する．以下，このような操作を単純に「x_2 と x_6 を交換する」と書く．新しい辞書は次のようになる．

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - x_5 + \frac{4}{5}x_6, \\ \text{制約条件} & x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_6, \\ & x_7 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - x_5 - \frac{1}{5}x_6, \\ & x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq 7). \end{array}$$

x_1 と x_7 を交換することにより次の辞書を得る．

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = x_6 + x_7, \\ \text{制約条件} & x_1 = \frac{25}{8} - \frac{9}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5 - \frac{1}{8}x_6 - \frac{5}{8}x_7, \\ & x_2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_7, \\ & x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq 7). \end{array}$$

この辞書は目的関数の非基底変数の係数がすべて非負なので最適となる．そして，元の問題の実行可能基底解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{25}{8}, \frac{9}{4}, 0, 0, 0)$ を得る．

2. 1．で最後に得られた辞書から x_6, x_7 を消去し，問題 (1) の目的関数に代入することで，問題 (1) の実行可能辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = \frac{79}{8} - \frac{7}{8} + \frac{7}{8}x_4 - \frac{11}{8}x_5, \\ \text{制約条件} & x_1 = \frac{25}{8} - \frac{9}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5, \\ & x_2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5, \\ & x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq 5), \end{array}$$

を得る．x_1 と x_5 を交換すると次の辞書を得る．

$$\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z = 3 + \frac{11}{5}x_1 + \frac{8}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4, \\
\text{制約条件} & x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4, \\
& x_5 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4, \\
& x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq 5).
\end{array}$$

目的関数における非基底変数の係数がすべて非負になったので，この解が最適解である．以上により，最適解は $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0, 1, 0, 0, 5)$，最適値 3 となる．

3. 問題 (1) の双対問題は次のようになる．

$$\begin{array}{ll}
\text{最大化} & -5y_1 - 4y_2 \\
\text{制約条件} & 2y_1 - 2y_2 + z_1 = 1, \\
& -5y_1 + y_2 + z_2 = 3, \\
& y_1 - 2y_3 + z_3 = 1, \\
& y_1 + z_4 = 0, \\
& -y_2 + z_5 = 0, \\
& z_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq 5).
\end{array}$$

4. 双対問題の最適解を (y^*, z^*) とする．2. で得られた問題 (1) の最適解と相補性条件 $x_i^* z_i^* = 0 \ (1 \leq i \leq 5)$ より $z_2^* = z_5^* = 0$ となる．したがって，

$$-5y_1^* + y_2^* = 3, -y_2^* = 0 \Leftrightarrow y_1^* = -\frac{3}{5}, y_2^* = 0$$

よって，双対問題の最適解は

$$(y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*, z_5^*) = (-\frac{3}{5}, 0, \frac{11}{5}, 0, \frac{8}{5}, \frac{3}{5}, 0)$$

となる．

問題 2

1. 辞書の状態から，$x_4 < 0$ であるから，主問題は実行不能である．双対定理により，もし双対問題が最適解をもつならば主問題も最適解をもつ．この最適解は実行可能解であるが，これは主問題が実行不能であることに矛盾する．したがって，双対問題が最適解をもつことはあり得ない．なお，次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -x_2 \\
\text{制約条件} & x_4 = -1 - x_1 - x_3 \\
& x_5 = 1 + x_2
\end{array}$$

は問題文の条件を満たし，この問題の双対問題は実行不能である．したがって問題文の条件を満たす問題の双対問題が実行不能になることは有り得る．

2. 辞書の状態から，主問題は非有界であるとわかる．このとき，双対問題は実行不能である (本年度第 2 回演習問題)．

問題 3

1. 2 次計画問題として定式化すると次のようになる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & x_1^2 + 4x_2^2, \\
\text{制約条件} & 2x_1 + 3x_2 = 1, \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

2 次計画問題の等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x, \\
\text{制約条件} & Ax = b, \\
 & x \geq 0,
\end{array}
\tag{1}
$$

における対応付けは

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix},\ b = 1,\ c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}
$$

となる．

2. 等式標準形 2 次計画問題に対する双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & b^T y - \frac{1}{2}x^T Q x \\
\text{制約条件} & A^T y + z = Qx + c \\
 & z \geq 0
\end{array}
\tag{2}
$$

となる．具体的なデータを代入すると，1 の問題の双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & y - x_1^2 - 4x_2^2, \\
\text{制約条件} & 2y + z_1 = 2x_1, \\
 & 3y + z_2 = 8x_2, \\
 & z_1 \geq 0\ z_2 \geq 0
\end{array}
$$

となる．

3. $x \in \Re^2$ が問題 (1) の最適解であるための必要十分条件は，ある $y \in \Re$ と $z \in \Re^2$ が存在して，

$$
\begin{array}{l}
Ax = b, \\
A^T y + z = Qx + c, \\
x^T z = 0, \\
x \geq 0\ z \geq 0
\end{array}
$$

を満たすことである．データを代入すると 1 の問題の最適性条件は次のようになる．

$$2x_1 + 3x_2 = 1, \tag{3}$$
$$2y + z_1 = 2x_1, \tag{4}$$
$$3y + z_2 = 8x_2, \tag{5}$$
$$x_1 z_1 + x_2 z_2 = 0, \tag{6}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0. \tag{7}$$

4．3 で得られた最適性条件を満たす点を実際に求める．相補性条件 (6) と非負条件 (7) から $x_1 z_1 = 0$ かつ $x_2 z_2 = 0$ となる．$x_1 = x_2 = 0$ のとき等式条件 (3) を満たさないから，(イ) $x_1 = z_2 = 0$，(ロ) $z_1 = x_2 = 0$，(ハ) $z_1 = z_2 = 0$ の 3 つのケースを考えればよい．

(イ)$x_1 = z_2 = 0$ のとき
(3) より $x_2 = \frac{1}{3}$ となる．これを (5) に代入すると $y = \frac{8}{9}$ となる．しかし，このとき (4) を満たす z_1 は存在しない．

(ロ)$z_1 = x_2 = 0$ のとき
(3) より $x_1 = \frac{1}{2}$ となる．これを (4) に代入すると $y = \frac{1}{2}$ となる．しかし，このとき (5) を満たす z_2 は存在しない．

(ハ)$z_1 = z_2 = 0$ のとき
(4)，(5) から $2y = 2x_1$，$3y = 8x_2$ となり，$x_2 = \frac{3}{8}y = \frac{3}{8}x_1$ を得る．これを (3) に代入すると

$$2x_1 + 3 \cdot \frac{3}{8}x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{8}{25}$$

が得られ，この値から $x_2 = \frac{3}{25}$，$y = \frac{8}{25}$ となる．以上により，1．の問題の最適解は $(x_1, x_2) = (\frac{8}{25}, \frac{3}{25})$ であり，最適値を計算すると $\frac{4}{25}$ となる．

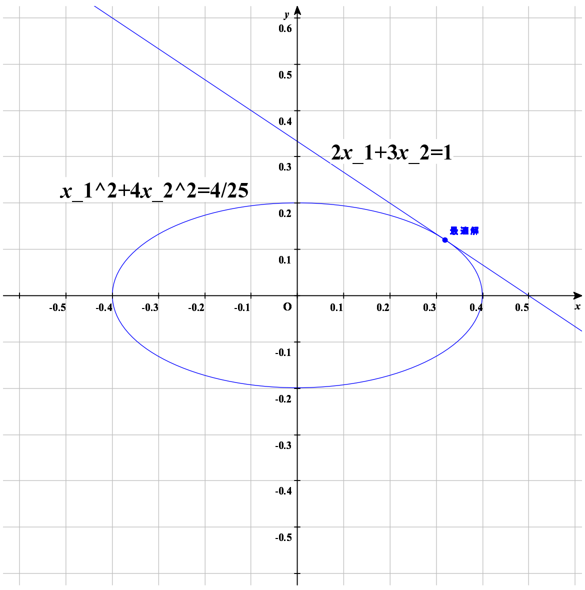

図 1　最適解の図示

(参考) 直線 $2x_1 + 3x_2 = 1$，楕円 $x_1^2 + 4x_2^2 = \frac{4}{25}$ および最適解 $(\frac{8}{25}, \frac{3}{25})$ を $\Re^2$ 平面に描くと，最適解で楕円と直線は接する．

問題 4

1. 関数 $g(x_1, x_2)$ の勾配ベクトル $\nabla g(x_1, x_2)$ を求めると，

$$\nabla g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + x_2^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

となる．$g(x_1, x_2)$ の局所最小解であるための 1 階の必要条件を満たすのは勾配ベクトルがゼロベクトルとなる点である．これを求めると，

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 = 0,\ -2x_1 + x_2^2 - x_2 &\Leftrightarrow x_1 = x_2,\ x_2^2 - 3x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ または } (x_1, x_2) = (3, 3) \end{aligned}$$

となる．

2. 関数 $g(x_1, x_2)$ のヘッセ行列 $\nabla^2 g(x_1, x_2)$ は

$$\nabla^2 g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

となる．1．で求めた各点において，ヘッセ行列の (半) 正定値性を調べる．まず，

$$\nabla^2 g(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

であるが，

$$[0, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

であるから，$\nabla^2 g(0, 0)$ は半正定値行列では (当然正定値でも) ない．

次に，

$$\nabla^2 g(3, 3) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

であるが，

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

となる．ここで，最後の等号は $(x_1, x_2) = (0, 0)$ のときに限り成り立つ．よって，$\nabla^2(3, 3)$ は正定値行列である．したがって，点 $(3, 3)$ は g の局所最小解であるための 2 次の必要条件，十分条件を満たす．

3. 点 $(x_1, x_2))$ における最急降下方向 d_{sd} は $-\nabla g(x_1, x_2)$ で与えられる．したがって，

$$d_{sd} = -\nabla g(2, 2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

となる．

4. 点 (x_1, x_2) からニュートン法を開始したときの 1 反復後の点 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ は

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \nabla^2 g(x_1, x_2)^{-1} \nabla g(x_1, x_2)$$

で与えられる．実際に数値を代入すると

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．