オペレーションズリサーチ　　期末試験解答例 ２０１０年２月２日実施

問題１

1. グラフ $G = (V, E)$ を考える．

- 森：閉路を含まない G の部分グラフ $F = (V_F, E_F)$ $(V_F \subset V, E_F \subset E)$.
- 全域木：森であり，$V_F = V$ となり，任意の 2 頂点の間に路が存在するグラフ.
- 二部グラフ：頂点集合が 2 つの集合に分けられ，その二つの集合間にのみ枝を持つグラフ.

2. ダイクストラ法を記述すると次のようになる．

ステップ 0：$S = \phi,\ \bar{S} = V,\ d(s) = 0,\ d(i) = \infty\ (i \in V - \{s\}),\ P(i) = 0$ とする．
ステップ 1：$S = V$ ならばアルゴリズム終了．そうでなければ，$d(v) = \min\{d(i) : i \in \bar{S}\}$ となる頂点 $v \in \bar{S}$ を選ぶ.
ステップ 2：$S = S \cup \{v\},\ \bar{S} = \bar{S} - \{v\}$ とし，$e_{vj} \in E$ かつ $j \in \bar{S}$ となるすべての枝 e_{vj} に対して，

$$d(j) > d(v) + w_{vj} \text{ならば } d(j) = d(v) + w_{vj},\ P(j) = v$$

とする．ステップ 1 に戻る．

始点 s から各頂点 i への最短路は頂点 i から直前の頂点 $P(i)$ を順にたどり，頂点 s まで戻ることにより得られる．

問題２

1. 目的関数の係数/制約条件の係数を求めると，$20/5 > 30/9 > 5/4 > 3/4 > 2/3$ となるので，x_5, x_2, x_4, x_3, x_1 の順に考える．以下では変数の値はこの順に表す．緩和問題の解は $(1, 1, 3/4, 0, 0)$ であり，最適値は 215/4 となる．この解を整数解に切り下げて，実行可能解 $x_0 = (1, 1, 0, 0, 0)$ を得，このときの目的関数値は $z_0 = 50$ となる．

2. 緩和問題の最適解において $x_4 = 3/4$ となったので，x_4 で分枝する．
(1) $x_4 = 0$ のとき
緩和問題の解は $(1, 1, 0, 3/4, 0)$，このときの目的関数値は 209/4 となる．$209/4 > 50 = x_0$ なので，x_3 で分枝する．
(2) $x_4 = 0,\ x_3 = 0$ のとき
緩和問題の解は $(1, 1, 0, 0, 1)$，このときの目的関数値は 52 となる．この解は整数解であり，$52 > 50 = z_0$ であるので，$x_0 \leftarrow (1, 1, 0, 0, 1),\ z_0 \leftarrow 52$ と更新する．

(3) $x_4 = 0,\ x_3 = 1$ のとき
緩和問題の解は $(1, 8/9, 0, 1, 0)$，このときの目的関数値は $149/3$ となる．$149/3 \le 52 = z_0$ なので，限定操作ができる．
(4) $x_4 = 1$ のとき
緩和問題の解は $(1, 8/9, 1, 0, 0)$，このときの目的関数値は $155/3$ となる．$155/3 \le 52 = z_0$ なので，限定操作ができる．
以上により，元のナップザック問題の最適解 $x_1 = x_2 = x_5 = 1,\ x_3 = x_4 = 0$，最適値 52 を得る．

問題3

1. 各項目の真のウェイトからなるベクトルを $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)^T$ とすると，真の一対比較行列 $\bar{A}$ は

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_1/\bar{w}_2 & \bar{w}_1/\bar{w}_3 \\ \bar{w}_2/\bar{w}_1 & 1 & \bar{w}_2/\bar{w}_3 \\ \bar{w}_3/\bar{w}_1 & \bar{w}_3/\bar{w}_2 & 1 \end{bmatrix}$$

となり，$\bar{A}\bar{w} = 3\bar{w}$ が成り立つ．すなわち，ウェイトベクトル $\bar{w}$ は行列 $\bar{A}$ の固有値 3 に対する固有ベクトルとなっている．また，$\bar{A}$ のランクは 1 であり，3 以外の固有値は 0 だけであるので，3 が $\bar{A}$ の最大固有値となっている．AHP では一般の一対比較行列においても以上のような関係が成り立つと考え，一対比較行列 A の最大固有値に対する固有ベクトルを利用する．

2. $i = 1, 2, 3$ について，Aw の第 i 要素を w の第 i 要素で割った値を λ_i とすると，

$$\lambda_1 = 2.974..,\ \lambda_2 = 3.000..,\ \lambda_3 = 3.146..$$

となり，最大固有値の近似値 $\bar{\lambda}_{max}$ は $\bar{\lambda}_{max} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/3 = \underline{3.04}$ となる．また整合度 CI は

$$CI = \frac{\bar{\lambda}_{max} - n}{n - 1} = \underline{0.02}$$

となる．

問題4

1. DMU_1 の D 効率値を表す数理計画問題は次のようになる．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \theta = \frac{12v_1+4v_2+8v_3}{4u} \\ \text{制約条件} & \frac{12v_1+4v_2+8v_3}{4u} \le 1 \\ & \frac{4v_1+4v_2+6v_3}{2u} \le 1 \\ & \frac{2v_1+v_2+3v_3}{u} \le 1 \\ & \frac{6v_1+9v_2+3v_3}{3u} \le 1 \\ & u, v_1, v_2, v_3 \ge 0 \end{array}$$

2. DMU_1 の効率値を最大化しているので，DMU_1 にとって最も有利になるように各項目のウェイトを決めている．

3. 各 DMU の効率値は 1 以下である．

4. DMU_1 の出力 1/入力 1 の値は 3 で 4 つの DMU のうち一番大きい．そこで，出力 1 へのウェイトを大きくすることを考えてみる．たとえば，$u = 3, v_1 = 1, v_2 = v_3 = 0$ とすれば DMU_1 の効率値は 1 であり，1 で得られた問題のその他の制約も満たす．なお，ウェイトの決め方は 1 通りではないので，これ以外の値であってもよい．