

オペレーションズリサーチ 中間試験解答例 2009年12月2日実施

問題 1

1. 標準形に直すと次のようになる .

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{制約条件} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 4) \end{array}$$

2. 1. の問題に対して, x_5 と x_6 を人工変数とする人工問題を作ると次のようになる .

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = -x_5 - x_6 = -12 + 3x_1 + 4x_3 + x_4 \\ \text{制約条件} & x_5 = 7 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \\ & x_6 = 5 - x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 6) \end{array}$$

これを初期辞書としてシンプレックス法を開始する . x_1 を基底変数とし, x_6 を非基底変数とする . 以下このような操作を $(x_{in}, x_{out}) = (x_1, x_6)$ と書く . 新しい辞書は次のようになる .

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ \text{制約条件} & x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ & x_6 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ & x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 6) \end{array}$$

$(x_{in}, x_{out}) = (x_2, x_6)$ として次の辞書を得る .

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = -x_5 - x_6 \\ \text{制約条件} & x_1 = 4 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 \\ & x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 \\ & x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 6) \end{array}$$

目的関数の非基底変数の係数がすべて 0 以下なのでこれは最適辞書である . 最適値は 0 なので元の問題は実行可能である . この辞書の制約式から x_5 と x_6 を取り除き, 元の問題の目的関数に代入することで, 元の問題に対する初期実行可能辞書を得る .

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = -7 + \frac{7}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 = 4 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ & x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ & x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 4) \end{array}$$

$(x_{in}, x_{out}) = (x_3, x_1)$ とすると次の辞書を得る .

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = -\frac{7}{4}x_1 - \frac{5}{4}x_4 \\ \text{制約条件} & x_2 = 2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4 \\ & x_3 = 3 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4 \\ & x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 4) \end{array}$$

目的関数の非基底変数の係数がすべて 0 以下なので，これは最適辞書である．最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 3, 0)$ ，最適値は 0 である．

3. $\diamond = a$ と置く．このとき， x_2, x_3 を基底変数とする辞書を考える．目的関数は

$$\begin{aligned} z &= -x_1 - 3x_2 + ax_3 \\ &= -x_1 - 3\left(2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4\right) + a\left(3 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4\right) \\ &= 3a - 6 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}a\right)x_1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}a\right)x_4 \end{aligned}$$

となる．このとき，目的関数の非基底変数の係数がすべて 0 以下であればよいので，満たすべき条件は

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}a \geq 0, \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{4}a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{3}, \quad a \geq -3 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{3}$$

となる．

問題 2

1. 線形計画問題の主問題が最適解を持てば，双対問題も最適解を持ち，最適値は一致する．(40 字)

2. 双対問題は次のようになる．

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & b^T y \\ \text{制約条件} & A^T y \geq 0 \end{array}$$

3. 問題の形から，主問題の任意の実行可能解は最適解になり，最適値は 0 である．よって，主問題が実行可能であれば，主問題は最適解を持つ．すると双対問題も最適解を持ち，最適値は 0 である．いま，ある y が $A^T y \geq 0$ を満たすとする．このとき， y は双対問題の実行可能解だから目的関数値は (最適値の) 0 以上となる．すなわち $b^T y \geq 0$ となる．したがって， $A^T y \geq 0$, $b^T y < 0$ を満たす y は存在しない．

4. 背理法で示す．いま $A^T y \geq 0$, $b^T y < 0$ を満たす y が存在しないとすると．このとき $A^T y \geq 0$ を満たす y に対して， $b^T y \geq 0$ が成り立つ．いま， $0_m = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathfrak{R}^m$ は双対問題の実行可能解であり，目的関数値は 0 である．よって双対問題は最適解を持つ．一般に双対問題の双対問題は主問題なので，双対問題が最適解を持てば主問題も最適解を持つ．しかし主問題は実行不能なのでこれは矛盾である．以上により， $A^T y \geq 0$, $b^T y < 0$ を満たす y が存在する．

問題 3

1. 問題文にあるように， x_i ($1 \leq i \leq k+l$) と H との距離は， $\frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i + b|}{\|\mathbf{a}\|}$ で与えられる．ここで， $y_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_i + b) > 0$ であり， $|y_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_i + b)| = |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_i + b|$ だから， $|\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i + b| = y_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_i + b)$ となる．よって， H と x_i ($1 \leq i \leq k+l$) との最小値 $d(\mathbf{a}, b)$ は

$$d(\mathbf{a}, b) = \min_{1 \leq i \leq k+l} \frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i + b|}{\|\mathbf{a}\|} = \min_{1 \leq i \leq k+l} \frac{y_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_i + b)}{\|\mathbf{a}\|}$$

となる。

2. いま, $H^+ = \{x \mid a^T x + b > 0\}$, $H^- = \{x \mid a^T x + b < 0\}$ と定める. このとき, 正の数 α に対して,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(a^T x + b) = 0\} = H, \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(a^T x + b) > 0\} = H^+, \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(a^T x + b) < 0\} = H^-$$

となる. 簡単に言えば, 関数 $a^T x + b$ に正の数を掛けても \mathbb{R}^n を分割する性質は不変である.

関数 $a^T x + b$ が集合 A, B を分けるとする. このとき, 任意の $1 \leq i \leq k+l$ に対して $y_i(a^T x_i + b) > 0$ となる. いま, $m = \min_{1 \leq i \leq k+l} y_i(a^T x_i + b) > 0$ とする. このとき,

$$y_i(a^T x_i + b) \geq m \quad (1 \leq i \leq k+l)$$

であり, 少なくとも一つの i について等号が成立する. この不等式は

$$\frac{y_i(a^T x_i + b)}{m} \geq 1 \quad (1 \leq i \leq k+l)$$

と同値であり, 少なくとも一つの i で等号が成り立つ. したがって, 関数 $\frac{a^T x + b}{m}$ は問題文の条件を満たす. このとき, $d(a, b) = \frac{1}{\|a\|}$ となる.

3. $d(a, b)$ を最大にする関数 $a^T x + b$ を求める問題は, 次のように定式化できる.

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \frac{1}{\|a\|} \\ \text{制約条件} & \min_{1 \leq i \leq k+l} y_i(a^T x_i + b) = 1 \end{array}$$

$\frac{1}{\|a\|}$ を最大にすることは $\|a\|^2 = a^T a$ を最小にすることと等価である. よって, 上の問題は次の問題と等価である.

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & a^T a \\ \text{制約条件} & \min_{1 \leq i \leq k+l} y_i(a^T x_i + b) = 1 \quad (*) \end{array}$$

この問題はさらに次の 2 次計画問題と等価である.

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & a^T a \\ \text{制約条件} & y_i(a^T x_i + b) \geq 1 \quad (1 \leq i \leq k+l) \quad (**) \end{array}$$

この理由を以下で説明する. 問題 (*) の実行可能解は問題 (**) の実行可能解であるから, 問題 (*) の最適値を p_1 , 問題 (**) の最適値を p_2 とすれば, $p_2 \leq p_1$ となる. いま, 問題 (**) の最適解を (a, b) とすれば, $\min_{1 \leq i \leq k+l} y_i(a^T x_i + b) = 1$ を満たす. なぜならば, もし $m = \min_{1 \leq i \leq k+l} y_i(a^T x_i + b) > 1$ であるならば, $a' = a/m, b' = b/m$ とすればこれらは $\min_{1 \leq i \leq k+l} y_i(a'^T x_i + b') = 1$ を満たし, かつ目的関数値は p_2 より小さくなるので, (a, b) の最適性に反するからである. よって, (a, b) は問題 (*) の実行可能解であるから, $p_1 \leq p_2$ となる. したがって $p_1 = p_2$ であり, (a, b) は問題 (*) の最適解である.

問題 4

この問題では、テーラー展開が鍵を握っている。

1. 最急降下方向 d_S は $-\nabla f(\mathbf{x})$ で与えられる。これがゼロベクトルでないとき降下方向になっていることを以下で示す。

(簡易版) $\epsilon > 0$ とする。このとき、 ϵ が十分小さければ、テーラー展開によって

$$f(\mathbf{x} + \epsilon d_S) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\epsilon d_S) = f(\mathbf{x}) - \epsilon \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 < f(\mathbf{x})$$

となるので、 d_S は降下方向である。

(厳密版) $\epsilon > 0$ とする。このとき、テーラー展開によって、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \epsilon d_S) &= f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\epsilon d_S) + o(\|\epsilon d_S\|) \\ &= f(\mathbf{x}) - \epsilon \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 + o(\|\epsilon \nabla f(\mathbf{x})\|) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $o: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{o(w)}{w} = 0$ を満たす関数である。このとき、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$\epsilon \in [0, \delta) \Rightarrow \left| \frac{o(\|\epsilon \nabla f(\mathbf{x})\|)}{\|\epsilon \nabla f(\mathbf{x})\|} \right| < \frac{1}{2} \|\nabla f(\mathbf{x})\|$$

を満たす。すると、 $\epsilon \in (0, \delta)$ のとき、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \epsilon d_S) &= f(\mathbf{x}) - \epsilon \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 + o(\|\epsilon \nabla f(\mathbf{x})\|) \\ &< f(\mathbf{x}) - \epsilon \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 + \frac{1}{2} \epsilon \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 \\ &= f(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \epsilon \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 < f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

となる。

2. ニュートン法は、関数 f を最小化するために、

(1) f を現在いる点 \mathbf{x} の周りで 2 次近似し、

(2) 近似した関数の最小化を行い、最小解の方向に進む

ということを繰り返す。

テーラー展開により、

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$$

となる。 $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ が正定値であるとなれば右辺の関数は凸関数であり、その最小解は勾配ベクトルが零となる点である。すなわち、右辺の関数の最小解は

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \nabla^2 f(\mathbf{x}) (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \nabla^2 f(\mathbf{x})^{-1} \nabla f(\mathbf{x})$$

より、 $\mathbf{x} - \nabla^2 f(\mathbf{x})^{-1} \nabla f(\mathbf{x})$ となる。ニュートン法では次の点をこの最小解にするのではなく、最小解の方向、すなわちニュートン方向 $d_N = -\nabla^2 f(\mathbf{x})^{-1} \nabla f(\mathbf{x})$ に直線探索を行って決定する。