オペレーションズリサーチ　期末試験問題　２００８年2月１２日

問題１

３ヶ所の油田 X, Y, Z から採掘した石油を、４ヶ所の発電所 A, B, C, D へ輸送したい。油田 X, Y, Z での石油の生産量は、それぞれ 4 万バレル、9 万バレル、8 万バレルである。また、発電所 A, B, C, D で必要な石油量は、それぞれ 7 万バレル、5 万バレル、5 万バレル、4 万バレルである。各油田から各発電所へ石油１万バレルを輸送するのに必要な費用は次の表にまとめた。

輸送費用	発電所 A	発電所 B	発電所 C	発電所 D
油田 X	10	13	11	6
油田 Y	7	8	5	4
油田 Z	7	10	6	3

1. 総輸送費用が最小となるような手段を求める問題を、輸送問題として定式化せよ。
2. 北西隅の方法により実行可能基底解をつくれ。
3. 2. で求めた実行可能基底解を初期解として、ネットワークを使ったシンプレックス法を実行し、最適解を求めよ。

問題２

次のように定式化できるナップザック問題について、以下の問いに答えよ。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ \text{制約条件} & 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 17, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}. \end{array}$$

1. 最適値の上界と下界を求めよ。
2. このようなナップザック問題を、分枝限定法で解く事を考える。限定操作ができる状況を全て挙げよ。理解していることが伝わる程度に十分な説明をすること。

問題３

４つの支店の効率性を DEA（包絡分析法）を用いて評価する。それぞれの支店の従業員数と売上高は表の通りである。なお、従業員数を入力データ、売上高を出力データと捉える。

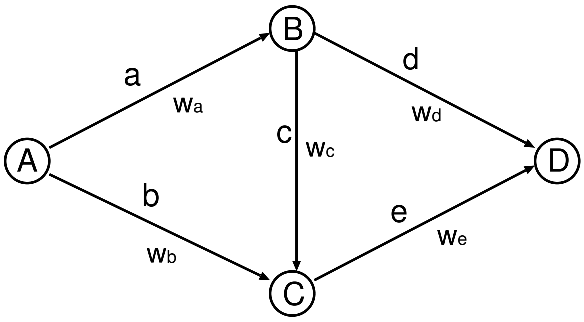
	支店１	支店２	支店３	支店４
従業員数（人）	5	11	9	4
売上高（億円）	7	15	14	6

1. 支店１の（CCR モデルに基づいた）D 効率値を表す数理計画問題を書け。（説明は必要ない）
2. 入力と出力が１つしかないため、1. の問題はシンプレックス法などの方法に頼らなくても解くことができる。それでは、支店１の D 効率値を求めよ。

裏へ続く

問題 4

次のような 4 つの頂点 (A, B, C, D) と 5 本の枝 (a, b, c, d, e) からなる有向グラフがある。各枝には距離 w が与えられている。



まず、次のようにベクトルを定義する。

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

すると、頂点 A から頂点 D までの最短路を求める問題は、次の整数計画問題 P として定式化することができる。以下では、頂点 A から頂点 D までの最短距離を l^* とおくことにする。

$$\text{整数計画問題 P：} \quad \begin{array}{ll} \min & w_a x_a + w_b x_b + w_c x_c + w_d x_d + w_e x_e \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{e}_a x_a + \boldsymbol{e}_b x_b + \boldsymbol{e}_c x_c + \boldsymbol{e}_d x_d + \boldsymbol{e}_e x_e = \boldsymbol{b}, \\ & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\}. \end{array}$$

1. 整数計画問題 P と次の線形計画問題 Q の最適値の大小関係を述べ、その理由を説明せよ。

$$\text{線形計画問題 Q：} \quad \begin{array}{ll} \min & w_a x_a + w_b x_b + w_c x_c + w_d x_d + w_e x_e \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{e}_a x_a + \boldsymbol{e}_b x_b + \boldsymbol{e}_c x_c + \boldsymbol{e}_d x_d + \boldsymbol{e}_e x_e = \boldsymbol{b}, \\ & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \geq 0. \end{array}$$

2. 線形計画問題 Q と次の線形計画問題 R の最適値の大小関係を述べ、その理由を説明せよ。

$$\text{線形計画問題 R：} \quad \begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{e}_a^T \boldsymbol{y} \leq w_a, \quad \boldsymbol{e}_b^T \boldsymbol{y} \leq w_b, \quad \boldsymbol{e}_c^T \boldsymbol{y} \leq w_c, \\ & \boldsymbol{e}_d^T \boldsymbol{y} \leq w_d, \quad \boldsymbol{e}_e^T \boldsymbol{y} \leq w_e. \end{array}$$

3. 次のように定義した $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ が、線形計画問題 R の実行可能解となっていることを示せ（背理法を使うと良い）。また、線形計画問題 R の最適値と l^* の大小関係を述べ、その理由を説明せよ。

$$\widetilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \text{頂点 A から頂点 A までの最短距離} \\ \text{頂点 A から頂点 B までの最短距離} \\ \text{頂点 A から頂点 C までの最短距離} \\ \text{頂点 A から頂点 D までの最短距離} \end{pmatrix}$$

4. 以上の設問を踏まえ、頂点 A から頂点 D までの最短距離 l^* が、線形計画問題 Q や R の最適値と等しいことを説明せよ。