オペレーションズリサーチ　中間試験問題　２００６年１２月５日

問題１

以下の線形計画問題をシンプレックス法により解け。なお、$(x_1, x_2) = (0, 0)$ を初期解とする（x_1, x_2 を非基底変数とする）こと。解答にあたり、各反復で基底に入るまたは出る変数の選択理由は明記するように。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 \le 5, \quad x_1 + 2x_2 \le 8, \\ & 3x_1 + x_2 \le 9, \quad x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0. \end{array}$$

問題２

次のような線形計画問題 (P) について考える。以下の設問に答えることにより、この問題の双対問題の双対問題が、また元の問題に戻ることを確認せよ。

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{最大化} & 8x_1 + \ \ x_2 + 6x_3 \\ & \text{制約条件} & 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 15, \\ & & 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 15, \\ & & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{array}$$

1. 線形計画問題 (P) の双対問題を作れ。
2. 1. で作った問題を変形して、主問題の形式（標準形）に変換せよ。
3. 2. で作った問題の双対を取り、それが元問題 (P) と等価であることを説明せよ。

問題３

ある凸２次計画問題の最適条件から、下のような線形相補性問題が導かれた。左の方にある４行４列の行列が半正定値行列であることを、定義に基づいて示せ。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \end{pmatrix} \ge 0, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

問題４

３次元ユークリッド空間上に２つの平面 $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \Re^3 \mid x_1 + x_2 = 4\}$ と $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \Re^3 \mid 2x_2 + x_3 = -2\}$ がある。これらの共通部分に属するベクトルの中で、ベクトル $(-3, 1, 2)^T$ に最も近いものを求めたい。この問題は、$\boldsymbol{x} \in \Re^3$ を変数とする次のような形式の制約付き非線形計画問題として定式化できる。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \end{array}$$

1. 定数行列 $\boldsymbol{A}$ と定数ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は、具体的にどのような値になるか述べよ。
2. この問題のラグランジュ関数を示せ。（わからなければ行列やベクトルでなく成分ごとに書き下して考えると良い）
3. この問題の KKT 条件 (最適解であるための一次の必要条件）を導出せよ。
4. 3. で求めた KKT 条件を満たす点を計算せよ。