オペレーションズリサーチ　　期末試験問題解答例　　　２００６年2月１４日

問題１

　ある商品を４ヶ所の工場で生産し、３ヶ所の店舗へ輸送している。ある日の工場での供給量と、店舗での需要量は次の表の通りである。また、各工場から各店舗へ製品を１単位輸送するのに必要な費用はその下の表のようになる。このとき、以下の問いに答えよ。

	工場１	工場２	工場３	工場４
供給量	30	40	30	20

	店舗１	店舗２	店舗３
需要量	40	20	60

輸送費用	店舗１	店舗２	店舗３
工場１	3	5	12
工場２	10	6	10
工場３	7	7	9
工場４	10	3	6

1. 総輸送費用が最小となるような手段を求める問題を、輸送問題として定式化せよ。
2. 北西隅の方法により実行可能基底解をつくれ。
3. 2. で求めた実行可能基底解を初期解として、ネットワークを使ったシンプレックス法を実行し、最適解を求めよ。　ヒント：一回程度の反復で終了する

---

1. 工場 i から店舗 j へ輸送する量を x_{ij} とすると、次のように定式化ができる。

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_{11} + 5x_{12} + 12x_{13} + 10x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} \\
 & \quad + 7x_{31} + 7x_{32} + 9x_{33} + 10x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \\
\text{s.t.} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30, \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40, \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30, \qquad x_{41} + x_{42} + x_{43} = 20, \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 40, \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 20, \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 60, \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4,\ j = 1, 2, 3).
\end{array}
$$

2. 北西隅の方法では、工場と店舗の番号の小さい順に数値を入れていく。その結果得られる実行可能基底解は次のようになる。

$$
\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.
$$

3. 基底変数 $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ に対応する枝の集合は、全域木である。この全域木に x_{31} に対応する枝を加えると、$x_{31}, x_{21}, x_{23}, x_{33}$ に対応する枝を含んだ閉路ができる。この閉路に沿って輸送量を θ 増加させると

$$(7 - 10 + 10 - 9)\theta$$

より、目的関数値は -2θ 減少する。そして、輸送量を 10 増加させたとき、変数 x_{21} が 0 となる。つまり、x_{31} が非基底変数から基底変数に移り、x_{21} が基底変数から非基底変数に移る。
すると、新たに得られた実行可能基底解は、

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 \\ 10 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

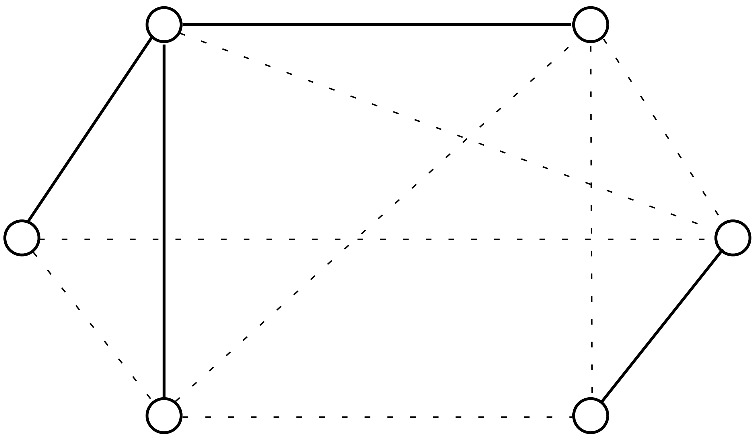
となる。この全域木にどの枝を加えても、これ以上目的関数値を減少させることはできない。よって、これが最適解となる。このとき、目的関数値は 780 となる。

問題２

1. 全域森であるが木ではない例を一つ挙げよ。まず全体のグラフを設定してから、そのようなものを例示するように。
2. ３行３列で整合度が 0 となる一対比較行列を一つ挙げよ。また、その行列の整合度を実際に計算してみよ。

---

1. 下の図のような、６つの頂点と実線と点線で描いた１１本の枝からなる全体グラフに対して、６つの頂点と実線で描いた４本の枝からなる部分グラフを考える。



この部分グラフは、閉路を含まず、全ての頂点を含み、連結でないので、全域森であり木でない例となる。なお、このグラフは無向グラフであるが、有向グラフで考えてもよい。

2. 例えば、次のような一対比較行列が題意を満たす。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

この行列の最大固有値は 3 である。よって、

$$\text{整合度} = \frac{3-3}{3-1} = 0$$

という計算より、整合度が 0 となることが確認できる。

問題３

倉庫にA, B, C, D, Eの５つの商品がある。それぞれの重量は順番に 500kg, 600kg, 500kg, 300kg, 500kg であり、売れたときの利益は 90 万円, 150 万円, 110 万円, 60 万円, 120 万円である。積載重量が 1000kg のトラックがあり、なるべく利益が多くなるように商品を運搬したい。このとき、以下の問いに答えよ。

1. この問題をナップザック問題として定式化せよ。
2. 一般の分枝限定法において、限定操作が可能となる状況を全て挙げよ。
3. この問題の最適解を分枝限定法により求めよ。「利益／重量」の大きい順に分枝するとよい。

---

1. 商品 i を運搬するとき $x_i = 1$、運搬しないとき $x_i = 0$ をとる変数を導入する。

$$\begin{array}{ll} \max & 90x_A + 150x_B + 110x_C + 60x_D + 120x_E \\ \text{s.t.} & 500x_A + 600x_B + 500x_C + 300x_D + 500x_E \leq 1000, \\ & x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \in \{0, 1\}. \end{array}$$

2. 次の 3 つの場合がある
   - 子問題の緩和問題が実行不能、つまり子問題に実行可能解が存在しない場合
   - 子問題の緩和問題の最適解が子問題の解になっている、つまり子問題の最適解が得られた場合
   - 子問題の緩和問題の最適値（子問題の最適値の上界）が既に得られている元問題の最適値の下界よりも小さい、つまり子問題に元問題の最適解が含まれないことが判明した場合

3. $\frac{150}{600} \geq \frac{120}{500} \geq \frac{110}{500} \geq \frac{60}{300} \geq \frac{90}{500}$ となるので、x_B, x_E, x_C, x_D, x_A の順に分枝を行う。

   - 上界は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 1, 0, 0, 4/5)$ のときで $\bar{z} = 246$、下界は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 1, 0, 0, 0)$ のときで $\underline{z} = 150$ となる。暫定解として $x^0 = (0, 1, 0, 0, 0)$、$z^0 = 150$ とする。x_B を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
   - $x_B = 0$ と固定した場合について考える。
     緩和問題の解が整数となるので、最適解は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 0, 1, 0, 1)$ のときで最適値 230 となる。最適解が得られたため限定操作ができる。暫定解として $x^0 = (0, 0, 1, 0, 1)$、$z^0 = 230$ とする。

- $x_B = 1$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 1, 0, 0, 4/5)$ のときで $\bar{z} = 246$、下界は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 1, 0, 0, 0)$ のときで $\underline{z} = 150$ となる。$x_B = 1$ とした上で、x_E を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
- $x_B = 1, x_E = 0$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 1, 4/5, 0, 0)$ のときで $\bar{z} = 238$、下界は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 1, 0, 0, 0)$ のときで $\underline{z} = 150$ となる。$x_B = 1, x_E = 0$ とした上で、x_C を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
- $x_B = 1, x_E = 1$ と固定した場合について考える。
  実行可能解は存在しないので、限定操作ができる。
- $x_B = 1, x_E = 0, x_C = 0$ とした場合について考える。
  上界は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (1/5, 1, 0, 1, 0)$ のときで $\bar{z} = 228$、下界は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 1, 0, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 210$ となる。上界 $\bar{z}$ が既に得られている下界 z^0 より小さいので、子問題をつくらなくてもよい（限定操作ができる）。
- $x_B = 1, x_E = 0, x_C = 1$ とした場合について考える。
  実行可能解は存在しないので、限定操作ができる。

以上より、最適解は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E) = (0, 0, 1, 0, 1)$ となり、このとき最適値は 230 となる。

問題 4

DMU_1 から DMU_n まで n 個の事業体がある。事業体 DMU_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ に対して、m 個の入力データからなるベクトル $\boldsymbol{x}_j \in \Re^m$ と s 個の出力データからなるベクトル $\boldsymbol{y}_j \in \Re^s$ が知られている。このとき、事業体 DMU_o の D 効率値は、$\boldsymbol{v} \in \Re^m, \boldsymbol{u} \in \Re^s$ を変数とする次の分数計画問題の最適値として定義されている。

$$\begin{array}{ll} \max & \dfrac{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x}_o} \\ \text{s.t.} & \dfrac{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x}_j} \leq 1 \ \ (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

この問題の最適値が、次の線形計画問題の最適値と一致することを説明せよ。なお、$\theta \in \Re,\ \lambda_j \in \Re$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ は変数である。

$$\begin{array}{ll} \min & \theta \\ \text{s.t.} & \theta \boldsymbol{x}_o - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{x}_j \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y}_o - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{y}_j \leq \boldsymbol{0}, \\ & \lambda_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, \cdots, n). \end{array}$$

ヒント：線形計画問題に帰着させ双対をとる

問題文中の分数計画問題において、分数の分母は正であるので、制約式では両辺に分母と同じ関数を乗じることにより線形制約に変換できる。また、すべての変数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を定数倍しても目的関数の値は変らないので、

目的関数の分母の大きさを 1 と固定する。すると、最適値が等しい次のような線形計画問題を得る。

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_o \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_o = 1 \\ & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \\ & \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

この問題を標準形で表現する。

$$\max \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_o^T & \boldsymbol{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}^T & \boldsymbol{x}_o^T & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{y}_1^T & -\boldsymbol{x}_1^T & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{y}_2^T & -\boldsymbol{x}_2^T & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{y}_n^T & -\boldsymbol{x}_n^T & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}.$$

双対を取ると次のような線形計画問題となる。双対定理より 2 つの問題の最適値は等しい。

$$\min \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \cdots & \boldsymbol{y}_n \\ \boldsymbol{x}_o & -\boldsymbol{x}_1 & -\boldsymbol{x}_2 & \cdots & -\boldsymbol{x}_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_o \\ \boldsymbol{0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この問題は、次のように書き換えることができる。

$$\begin{array}{ll} \min & \theta \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{y}_j \geq \boldsymbol{y}_o, \\ & \theta\boldsymbol{x}_o - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{x}_j \geq \boldsymbol{0}, \\ & \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \end{array}$$

これは、問題文中の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & \theta \\ \text{s.t.} & \theta\boldsymbol{x}_o - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{x}_j \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y}_o - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{y}_j \leq \boldsymbol{0}, \\ & \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \end{array}$$

であり、導出の過程より分数計画問題の最適値と一致している。