オペレーションズリサーチ　　　期末試験問題
２００４年2月１７日

略解

問題１

次の線形計画問題において以下の問いに答えよ。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 4x_2 \leq 18, \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

1. $(x_1, x_2) = (0, 0)$ を初期点としてシンプレックス法を適用し、最適解と最適値を求めよ。
2. この問題の双対問題を述べよ。
3. 1. で求めた最適解と相補性条件から双対問題の最適解を計算せよ。

---

1. スラック変数 x_3, x_4 を加え標準形をつくる。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 18, \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

x_1, x_2 を非基底変数とし辞書をつくる。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & x_3 = 18 - 3x_1 - 4x_2, \\ & x_4 = 12 - 3x_1 - 2x_2, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

x_1 を基底変数とし x_4 を非基底変数とすることにより、次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 4 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 = 4 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4, \\ & x_3 = 6 - 2x_2 + x_4, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

x_2 を基底変数とし x_3 を非基底変数とすることにより、次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 5 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 = 2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4, \\ & x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

この辞書の目的関数において、係数が正である非基底変数は存在しない。よって、最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 0, 0)$ であり、そのときの最適値は 5 となる。

2. 双対問題は、

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = 18y_1 + 12y_2 \\ \text{制約条件} & 3y_1 + 3y_2 - s_1 = 1, \\ & 4y_1 + 2y_2 - s_2 = 1, \\ & y_1 - s_3 = 0, \\ & y_2 - s_4 = 0, \\ & s_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

となる。（不等式の形でも良い。）

3. 相補性条件より、$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, s_1, s_2, s_3, s_4)$ が最適解であることの必要十分条件は以下の方程式を満たすことである。

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 18, & \text{———} \quad (1) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, & \text{———} \quad (2) \\ 3y_1 + 3y_2 - s_1 = 1, & \text{———} \quad (3) \\ 4y_1 + 2y_2 - s_2 = 1, & \text{———} \quad (4) \\ y_1 - s_3 = 0, & \text{———} \quad (5) \\ y_2 - s_4 = 0, & \text{———} \quad (6) \\ x_i s_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), & \text{———} \quad (7) \\ x_i \geq 0, s_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). & \text{———} \quad (8) \end{cases}$$

$x_1 = 2 \neq 0, x_2 = 3 \neq 0$ より、式 (7) から $s_1 = s_2 = 0$ であることがわかる。このとき、式 (3) と式 (4) は、$3y_1 + 3y_2 = 1, 4y_1 + 2y_2 = 1$ となる。これを解くことにより、$y_1 = y_2 = \frac{1}{6}$ を得る。式 (5) と式 (6) より、$s_3 = s_4 = \frac{1}{6}$ である。

以上より、双対問題の最適解は $(y_1, y_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ となる。最適値は 5 となり、主問題の最適値と等しい。

問題2

関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(x+y)^4 + \dfrac{1}{2}(3x-y)^2$ の最小化について考える。

1. 最急降下法を適用する場合、点 $(1,-2)$ での探索方向を求めよ。
2. ニュートン法を適用する場合、点 $(1,-2)$ での探索方向を求めよ。

---

1. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (x+y)^3 + 3(3x-y) \\ (x+y)^3 - (3x-y) \end{pmatrix}$ より、点 $(1,-2)$ での勾配ベクトルは $\nabla f(1,-2) = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \end{pmatrix}$ である。よって、最急降下法の探索方向は $-\nabla f(1,-2) = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \end{pmatrix}$ となる（定数倍していても良い）。
2. $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x+y)^2 + 9 & 3(x+y)^2 - 3 \\ 3(x+y)^2 - 3 & 3(x+y)^2 + 1 \end{pmatrix}$ より、点 $(1,-2)$ でのヘッセ行列は $\nabla^2 f(1,-2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ である。よって、ニュートン法の探索方向は

   $-\nabla^2 f(1,-2)^{-1} \nabla f(1,-2) = \begin{pmatrix} -7/6 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ となる（定数倍していても良い）。

問題3

ある科目の期末試験では４つの問題が出題された。問題１は２０分, 問題２は２０分, 問題３は２５分, 問題４は５０分かけて解くことができるものの、試験時間は全部で９０分しかない。また、配点は問題１が３０点, 問題２が１５点, 問題３が２５点, 問題４が３０点である。なお部分点は考えない。このとき、最も良い点数を取るには、どの問題を解いたらよいだろうか。

1. この問題を 0–1 計画問題に定式化せよ。
2. 分枝限定法 により最適解を求めよ。

---

1. 問題 i を解くとき $x_i = 1$、解かないとき $x_i = 0$ をとる変数を導入する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 30x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 30x_4 \\
\text{制約条件} & 20x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 50x_4 \leq 90, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}.
\end{array}
$$

2. $\frac{30}{20} \geq \frac{25}{25} \geq \frac{15}{20} \geq \frac{30}{50}$ となるので、x_1, x_3, x_2, x_4 の順に 1 分当たりの得点が高い。よって、以下ではこの順に分枝を行う。

- 上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1/2)$ のときで $\bar{z} = 85$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 70$ となる。暫定解として $x^0 = (1, 1, 1, 0)$、$z^0 = 70$ とする。x_1 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
- $x_1 = 0$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 9/10)$ のときで $\bar{z} = 67$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 45$ となる。上界 $\bar{z}$ が既に得られている下界 z^0 より小さいので、子問題をつくらなくてもよい（限定操作ができる）。
- $x_1 = 1$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1/2)$ のときで $\bar{z} = 85$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 70$ となる。$x_1 = 1$ とした上で x_3 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
- $x_1 = 1, x_3 = 0$ と固定した場合について考える。
  緩和問題の解が整数となるので、最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1)$ のときで最適値 $z^* = 75$ となる。最適解が得られたため限定操作ができる。暫定解として $x^0 = (1, 1, 0, 1)$、$z^0 = 75$ とする。
- $x_1 = 1, x_3 = 1$ と固定した場合について考える。
  上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1/2)$ のときで $\bar{z} = 85$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 70$ となる。$x_1 = 1, x_3 = 1$ とした上で、x_2 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
- $x_1 = 1, x_3 = 1, x_2 = 0$ とした場合について考える。
  上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 9/10)$ のときで $\bar{z} = 82$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 55$ となる。$x_1 = 1, x_3 = 1, x_2 = 0$ とした上で、x_4 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
- $x_1 = 1, x_3 = 1, x_2 = 1$ とした場合について考える。
  上界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1/2)$ のときで $\bar{z} = 85$、下界は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 0)$ のときで $\underline{z} = 70$ となる。$x_1 = 1, x_3 = 1, x_2 = 1$ とした上で、x_4 を 0 と 1 に固定した 2 つの子問題をつくる（分枝操作をする）。
- $x_1 = 1, x_3 = 1, x_2 = 0, x_4 = 0$ とした場合、最適解は $z^* = 55$ となる。$z^* < z^0$ より、最適解は存在しない。
- $x_1 = 1, x_3 = 1, x_2 = 0, x_4 = 1$ とした場合、実行可能解は存在しない。
- $x_1 = 1, x_3 = 1, x_2 = 1, x_4 = 0$ とした場合、最適解は $z^* = 70$ となる。$z^* < z^0$ より、最適解は存在しない。
- $x_1 = 1, x_3 = 1, x_2 = 1, x_4 = 1$ とした場合、実行可能解は存在しない。

以上より、最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1)$ となり、このとき最適値は 75 となる。

問題 4

T 社はアジアに 3 つの工場 F1，F2，F3 を建設し、そこで生産した製品 A を世界の 4 つのマーケット M1，M2，M3，M4 で販売することにしている。各生産地の生産量、各需要地の需要量と販売価格、および各生産地から各マーケットへの輸送単価を下表のように与える。このとき，T 社の利益を最大にする輸送計画およびその輸送計画のもとでの総利益を求めよ。

表 1: 輸送単価

	M1	M2	M3	M4
F1	19.1	27.3	30.9	44.7
F2	8.7	7.4	3.8	17.6
F3	41.6	32.9	32.7	29.1

表 2: 需要量と販売価格

	M1	M2	M3	M4
需要量（台）	3000	1000	9000	6000
販売価格	P1	P2	P3	P4

表 3: 供給量

	供給量（台）
F1	6000
F2	12000
F3	2000

分析： 利益は売り上げからコストを引いた値になる．総供給量が総需要量より大きいので，売り上げが一定であり，従って輸送コストを下げることで利益を最大にすることができる．すなわち，この問題は輸送問題の解法を用いて解決することができる．

回答： まず，ハウザッカー法を用いて初期解を求める． 輸送単価を並べると，一番小さいのは F2 → M3， 従って，F2 から M3 に 9000 台を輸送する． 次に小さいのは F2 → M2 であるので，F2 から M2 に 1000 台輸送することにする． 次に小さいのは F2 → M1 であるので，F2 から M1 に残りの 2000 を輸送することにする． 次に小さいのは F2 → M4 であるが，F2 に供給量がないので，その次に小さいのは F1 → M1 であることから，F1 の供給量 1000 を M1 に輸送することにする．これを繰り返すことにより，最終的に次の初期輸送計画を求めることができる． また，最終的に残った供給量はその工場の在庫とする．

	M1	M2	M3	M4	在庫
F1	1	0	0	4	1
F2	2	1	9	0	0
F3	0	0	0	2	0

単位：1000 台

次に，跳石法を用いて改善を行う．

まず，配送量が" ゼロ" である F1 → M2, F1 → M3, F2 → M4, F3 → M1, F3 → M2, F3 → M3 への配送を追加するときの輸送費の増減を計算する．ここでは計算の便宜のために，配送距離に 10 をかけて計算する．

	M1	M2	M3	M4	在庫
F1	191 1	273 0 95	309 0 167	447 4	0 1
F2	87 2	74 1	38 9	176 0 -167	0 0 104
F3	416 0 381	329 0 307	327 0 341	291 2	0 0 156

F2 から M4 への配送を追加することで，輸送費用が減少することが分かる．従って，F2 → M1 と F1 → M4 の輸送量のうち最大減量可能な 2000 台（$\theta \times 1000$）を減らし，F2 → M4 および F1 → M1 に同量を追加する．

$$\begin{aligned} &\because \quad 0+\theta \geq 0,\ 4-\theta \geq 0,\ 1+\theta \geq 0,\ 2-\theta \geq 0 \\ &\therefore \quad \theta \leq 2 \end{aligned}$$

	M1	M2	M3	M4	在庫
F1	191 3	273 0	309 0	447 2	0 1
F2	87 0	74 1	38 9	176 2	0 0
F3	416 0	329 0	327 0	291 2	0 0

同じ手順を繰り返すと，以下のようになり，

	M1	M2	M3	M4	在庫
F1	191 3	273 0 -72	309 0 0	447 2	0 1
F2	87 0 167	74 1	38 9	176 2	0 0 271
F3	416 0 381	329 0 140	327 0 174	291 2	0 0 156

	M1	M2	M3	M4	在庫
F1	191 3	273 1	309 0	447 1	0 1
F2	87 0	74 0	38 9	176 3	0 0
F3	416 0	329 0	327 0	291 2	0 0

	M1	M2	M3	M4	在庫
F1	191 3	273 1	309 0 0	447 1	0 1
F2	87 0 167	74 0 72	38 9	176 3	0 0 271
F3	416 0 381	329 0 212	327 0 174	291 2	0 0 156

最終的に，次の輸送計画が求まる．

	M1	M2	M3	M4	在庫
F1	3	1	0	1	1
F2	0	0	9	3	0
F3	0	0	0	2	0

単位：1000 台

このときの総利益は，(3 P1 + P2 + 9 P3 + 6 P4 - 274.5) × 1000 - M（製造費）である．