オペレーションズリサーチ　　　期末試験問題

２００３年２月４日

略解

問題１

次の線形計画問題において以下の問いに答えよ。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{制約条件} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 7, \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{array}$$

1. この問題を標準形に変換せよ。
2. 1. で求めた標準形を２段階シンプレックス法を使って解け。
3. 双対問題を作った上で、2. で求めた最適解と相補性条件からこの双対問題の最適解を計算せよ。

1.

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{制約条件} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0. \end{array}$$

2. まず人工問題を作る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w(= -x_5 - x_6) = -12 + 3x_1 + 4x_3 + x_4 \\ \text{制約条件} & x_5 = 7 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4, \\ & x_6 = 5 - x_1 - x_2 - x_3, \\ & x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{array}$$

x_1 を基底変数とし x_5 を非基底変数とすることにより、次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 \\ \text{制約条件} & x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ & x_6 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5, \\ & x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{array}$$

x_2 を基底変数とし x_6 を非基底変数とすることにより、次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w = -x_5 - x_6 \\ \text{制約条件} & x_1 = 4 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6, \\ & x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{array}$$

よって、最適値が 0 となる人工問題の解が得られた。このとき、x_1, x_2 を基底変数として元の問題の辞書をつくることができる。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = -7 + \frac{7}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 = 4 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4, \\ & x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

x_3 を基底変数とし x_1 を非基底変数とすることにより、次の辞書を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = -\frac{7}{4}x_1 - \frac{5}{4}x_4 \\ \text{制約条件} & x_2 = 2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, \\ & x_3 = 3 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4, \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

この辞書の目的関数において、係数が正である非基底変数は存在しない。よって、最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 3, 0)$ であり、そのときの最適値は 0 となる。

3. 双対問題は、

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & z = 7y_1 + 5y_2 \\ \text{制約条件} & 2y_1 + y_2 - s_1 = -1, \\ & -y_1 + y_2 - s_2 = -3, \\ & 3y_1 + y_2 - s_3 = 2, \\ & y_1 - s_4 = 0, \\ & s_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

となる。(不等式の形でも良い。)

相補性条件より、$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, s_1, s_2, s_3, s_4)$ が最適解であることの必要十分条件は以下の方程式を満たすことである。

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, & \text{———} \quad (1) \\
x_1 + x_2 + x_3 = 5, & \text{———} \quad (2) \\
2y_1 + y_2 - s_1 = -1, & \text{———} \quad (3) \\
-y_1 + y_2 - s_2 = -3, & \text{———} \quad (4) \\
3y_1 + y_2 - s_3 = 2, & \text{———} \quad (5) \\
y_1 - s_4 = 0, & \text{———} \quad (6) \\
x_i s_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), & \text{———} \quad (7) \\
x_i \geq 0, s_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). & \text{———} \quad (8)
\end{cases}
$$

$x_2 = 2 \neq 0, x_3 = 3 \neq 0$ より、式 (7) から $s_2 = s_3 = 0$ であることがわかる。このとき、式 (4) と式 (5) は、$-y_1 + y_2 = -3, 3y_1 + y_2 = 2$ となる。これを解くことにより、$(y_1, y_2) = (\frac{5}{4}, -\frac{7}{4})$ を得る。式 (3) と式 (6) より、$s_1 = \frac{7}{4}, s_4 = \frac{5}{4}$ である。

以上より、双対問題の最適解は $(y_1, y_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (\frac{5}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{7}{4}, 0, 0, \frac{5}{4})$ となる。最適値は 0 となり、当然であるが主問題の最適値と等しい。

問題 2

---

2 行 2 列の対称行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$ が与えれているとき、2 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を変数とする非線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} \leq 1
\end{array}
$$

について考える。

1. この問題の KKT 条件 (一次の必要条件）を示せ。
2. 行列 $\boldsymbol{A}$ が $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ である場合、非線形計画問題の最適値を求めよ。

---

1. ラグランジュ関数は、$L(\boldsymbol{x}, u) = -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + u(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} - 1)$ である。よって、KKT 条件は、

$$
\begin{array}{lr}
\nabla_x L(\boldsymbol{x}, u) = -2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + 2u\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, & \text{———} \quad (1) \\
\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} - 1 \leq 0, & \text{———} \quad (2) \\
u \geq 0, & \text{———} \quad (3) \\
u(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} - 1) = 0. & \text{———} \quad (4)
\end{array}
$$

となる。

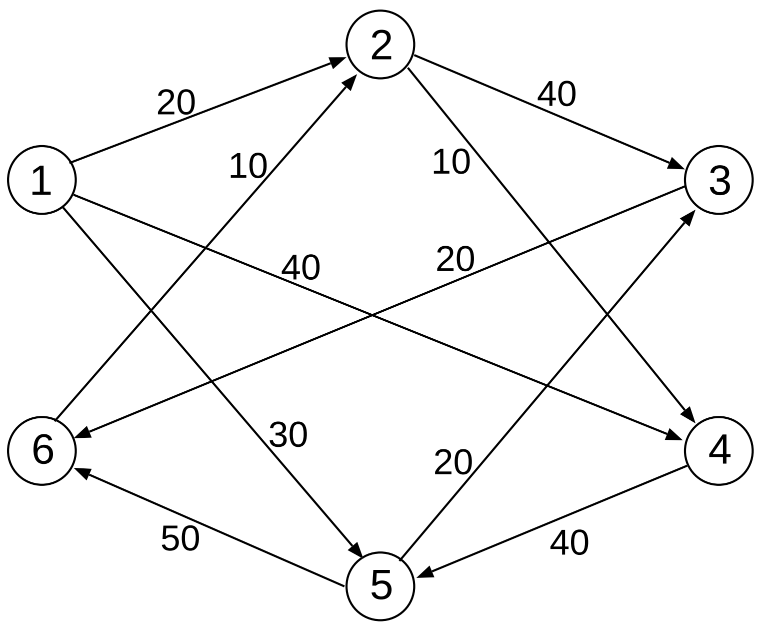
2. ラグランジュ乗数 u が 0 かどうかで場合分けをする。

   - $u = 0$ の場合
     式 (1) より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり、このとき式 (2) と式 (4) を満たす。そして、目的関数値は 0 となる。
   - $u > 0$ の場合
     式 (1) より u は行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値、$\boldsymbol{x}$ は対応する固有ベクトルとなる。特性方程式を解くと、$u = \pm 5$ となるが、$u = -5$ は式 (3) を満たさない。$u = 5$ の場合、固有ベクトルは α をパラメータとして $\boldsymbol{x} = \alpha(3,1)^T$ と書ける。$u > 0$ であるため、式 (4) より $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} - 1 = 0$ でなければならず、これに代入すると $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ であることがわかる。このとき、自動的に式 (2) も満たされる。目的関数値は $-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -u\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = -u$ であることより、-5 となる。

2 つの目的関数値 0 と -5 では -5 の方が小さいため、最適値は -5 である。

問題 3

次のネットワークにおいて頂点 1 からすべての頂点への最短路をダイクストラ法により求めよ。



以下では、次のような記号を使う。

d_i　:　頂点 1 から頂点 i への最短路の長さの上界

S　:　$d(i)$ が最短路の長さに一致していることが判明している頂点の集合

P_i　:　頂点 1 から頂点 i までの最短路において、i の直前に位置する頂点

初期値 $S = \emptyset, \quad \boldsymbol{d} = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (?, ?, ?, ?, ?, ?).$

反復 1 $\min d_i = d_1$ より、頂点 1 が確定し S に入る。

- $d_2 > d_1 + 20$ より、 $d_2 = 20, P_2 = 1$
- $d_4 > d_1 + 40$ より、 $d_4 = 40, P_4 = 1$
- $d_5 > d_1 + 30$ より、 $d_5 = 30, P_5 = 1$

$S = \{1\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 20, \infty, 40, 30, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (?, 1, ?, 1, 1, ?).$

反復 2 $\min d_i = d_2$ より、頂点 2 が確定し S に入る。

- $d_3 > d_2 + 40$ より、 $d_3 = 60, P_3 = 2$
- $d_4 > d_2 + 10$ より、 $d_4 = 30, P_4 = 2$

$S = \{1, 2\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 20, 60, 30, 30, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (?, 1, 2, 2, 1, ?).$

反復 3 $\min d_i = d_4$ より、頂点 4 が確定し S に入る。
以下同様に
$S = \{1, 2, 4\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 20, 60, 30, 30, \infty), \quad \boldsymbol{P} = (?, 1, 2, 2, 1, ?).$

反復 4 $\min d_i = d_5$ より、頂点 5 が確定し S に入る。
$S = \{1, 2, 4, 5\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 20, 50, 30, 30, 80), \quad \boldsymbol{P} = (?, 1, 5, 2, 1, 5).$

反復 5 $\min d_i = d_3$ より、頂点 3 が確定し S に入る。
$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 20, 50, 30, 30, 70), \quad \boldsymbol{P} = (?, 1, 5, 2, 1, 5).$

反復 6 $\min d_i = d_6$ より、頂点 6 が確定し S に入る。
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \boldsymbol{d} = (0, 20, 50, 30, 30, 70), \quad \boldsymbol{P} = (?, 1, 5, 2, 1, 3).$

反復 7 S に全ての頂点が含まれたので終了。

各頂点への最短路は次のようになる。

2 への最短路　:　$1 \to 2$
3 への最短路　:　$1 \to 5 \to 3$
4 への最短路　:　$1 \to 2 \to 4$
5 への最短路　:　$1 \to 5$
6 への最短路　:　$1 \to 5 \to 3 \to 6$

問題４

内山君は２月の研究室配属に際し，A,B,C 三つの研究室を候補とし，AHP 手法を用いてこれらの研究室を評価することにした．評価項目は，研究内容，毎週のゼミの回数，教官の優しさ，および研究室の雰囲気としたとき，表１に示したような各評価項目の一対比較表を得た．

表 1: 4 つの評価項目の一対比較表

	研究内容	ゼミの回数	優しさ	雰囲気
研究内容	1	2	4	8
ゼミの回数	1/2	1	2	4
優しさ	1/4	1/2	1	2
雰囲気	1/8	1/4	1/2	1

問１：

(1) この問題の AHP 階層図を描け．

(2) 各評価項目のウェイトを計算し，上記一対比較表の整合性を検証せよ．

問２：

上記評価項目のウェイトを大きい順に並べ，80 %を占めるまでの評価項目２つに限定して研究室 A,B,C について一対比較を行った結果，ウェイトの大きさが１番であった評価項目に対しては表２のような一対比較表を得て，ウェイトの大きさが２番であった評価項目に対しては表３のような一対比較表を得た．

表 2: ウェイトが１番であった評価項目に対する３研究室の一対比較表

1 番目の評価項目	研究室 A	研究室 B	研究室 C
研究室 A	1	1/2	2
研究室 B	2	1	4
研究室 C	1/2	1/4	1

表 3: ウェイトが２番であった評価項目に対する３研究室の一対比較表

2 番目の評価項目	研究室 A	研究室 B	研究室 C
研究室 A	1	2	4
研究室 B	1/2	1	2
研究室 C	1/4	1/2	1

下記の問いに答えよ.

(1) 表 2 および表 3 のウェイトを求めよ.

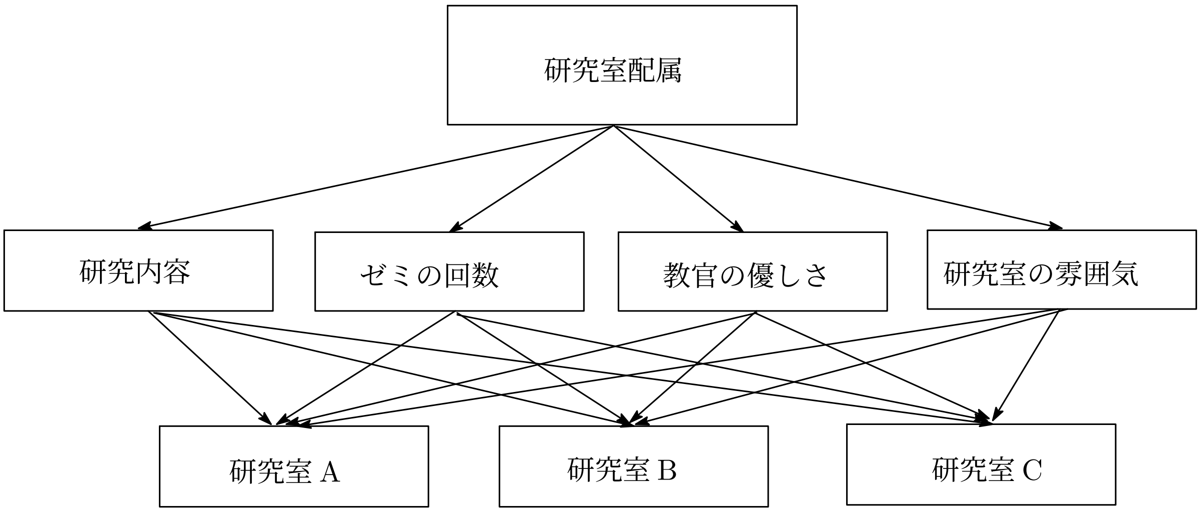
(2) 表 2 および表 3 の整合性を検証せよ.

(3) 表 1，表 2，表 3 の総合得点行列を計算し，内山君が一番気にいっている研究室はどの研究室か判断せよ.

注：$\sqrt{2} = 1.4$

問題 4 の回答例

Step1: AHP 階層図を作成する.



Step2: 評価項目の一対比較表からウエイトを計算する.

評価項目の一対比較表とウエイト

評価項目	研究内容	ゼミの回数	教官の優しさ	研究室の雰囲気	幾何平均	ウエイト
研究内容	1	2	4	8	$2\sqrt{2}$	0.533
ゼミの回数	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\sqrt{2}$	0.267
教官の優しさ	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0.133
研究室の雰囲気	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0.067

Step3:整合性を計算する．

評価項目の一対比較表の整合性計算

評価項目	研究内容 0.533	ゼミの回数 0.267	教官の優しさ 0.133	研究室の雰囲気 0.067	加重合計	推定 λ
研究内容	1	2	4	8	2.133	4
ゼミの回数	$\frac{1}{2}$	1	2	4	1.067	4
教官の優しさ	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	0.533	4
研究室の雰囲気	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0.267	4

$$CI = \frac{(4+4+4+4)/4-4}{4-1} = 0.0$$

Step4:ウエイトが1番大きい研究内容と2番目のゼミの回数まで合計すると，合計ウエイトが100%(0.533+0.267)=80%であるので，表2は研究内容に対する研究室A,B,Cの一対比較，表3はゼミの回数に対する研究室A,B,Cの一対比較であることが分かる．この2項目のウエイトを100%として，ウエイトを計算しなおすと，0.533/0.8=0.666, 0.267/0.8=0.334となる．

表2に基づきウエイトを求めると以下のようになる．

研究内容に対する3研究室のウエイト

研究内容	研究室A	研究室B	研究室C	幾何平均	ウエイト
研究室A	1	$\frac{1}{2}$	2	1	0.286
研究室B	2	1	4	2	0.571
研究室C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0.143

表3に基づきウエイトを求めると以下のようになる．

ゼミの回数に対する3研究室のウエイト

ゼミの回数	研究室A	研究室B	研究室C	幾何平均	ウエイト
研究室A	1	2	4	2	0.571
研究室B	$\frac{1}{2}$	1	2	1	0.286
研究室C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0.143

Step5: 整合性を検証する．

表 2 の整合性を以下のように検証する．

研究内容に対する 3 研究室の一対比較の整合性

研究内容	研究室 A 0.286	研究室 B 0.571	研究室 C 0.143	加重合計	推定 λ
研究室 A	1	$\frac{1}{2}$	2	0.857	3
研究室 B	2	1	4	1.714	3
研究室 C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0.429	3

$$CI = \frac{(3+3+3)/3-3}{3-2} = 0.0$$

表 3 の整合性を以下のように検証する．

ゼミの回数に対する 3 研究室の一対比較の整合性

ゼミの回数	研究室 A 0.571	研究室 B 0.286	研究室 C 0.143	加重合計	推定 λ
研究室 A	1	2	4	1.714	3
研究室 B	$\frac{1}{2}$	1	2	0.857	3
研究室 C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0.429	3

$$CI = \frac{(3+3+3)/3-3}{3-2} = 0.0$$

Step6:総合得点行列を計算し，内山君が一番気にいた研究室を判断する．

総合得点の計算

	研究内容 0.666	ゼミの回数 0.334	総合得点
研究室 A	0.286	0.571	0.381
研究室 B	0.571	0.286	0.476
研究室 C	0.143	0.143	0.143

従って，内山君が一番気にいた研究室は総合得点 0.476 の研究室 B である．